Ս. Մ. ՆԻԿՈԼՍԿԻ, Մ. Կ. ՊՈՏԱՊՈՎ,
Ն. Ն. ՌԵՇԵՏՆԻԿՈՎ, Ա. Վ. ՇԵՎԿԻՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

8-րդ դասարանի դասագիրք

Երևան
«Անտարես»
2012

ՀՏԴ 373.167.1: 512 (075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72
Հ 316

Դասագիրքը հաստատված է Հայաստանի Հանրապետության կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Никольский С.М. и др. Алгебра: учебник 8-го класса

Թարգմանությունը, փոփոխությունները և խմբագրումը՝ Ռ. Ավետիսյանի

Հ 316 Հանրահաշիվ, 8-րդ դասարանի դասագիրք/թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռուբեն Ավետիսյան- Եր.: Անտարես, 2012 - 280 էջ:

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ:

Պայմանական նշաններ՝
- առավել դժվար առաջադրանքներ
- առաջադրանքներ բանավոր աշխատանքների համար

ՀՏԴ 373.167.1: 512 (075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72

ISBN 978-9939-51-416-1

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2: \end{cases}$$

1.1 Երկու անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարումներ

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

հավասարումը, որտեղ a, b, c-ն տված թվեր են, ընդ որում a և b թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, իսկ x-ը և y-ը անհայտներ են, անվանում են x և y ***երկու անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարում:***

Այդ անվանումը կապված է նրա հետ, որ (1) հավասարման ձախ մասը x և y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի կատարյալ տեսքի բազմանդամ է:

a և b թվերն անվանում են ***անհայտների գործակիցներ,*** a թիվը՝ x-ի գործակից, իսկ b թիվը՝ y-ի գործակից:

$$ax,\ by,\ c$$

արտահայտություններն անվանում են (1) ***հավասարման անդամներ:*** Ընդ որում c թիվն անվանում են ***ազատ անդամ:***

$(x_0; y_0)$ թվազույգն անվանում են (1) ***հավասարման լուծում,*** եթե այդ թվերը բավարարում են (1) հավասարմանը, այսինքն x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0, իսկ y-ի փոխարեն y_0՝ հավասարումը վերածվում է ճիշտ թվային հավասարության՝

$$ax_0 + by_0 + c = 0:$$

Երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման օրինակ կարող է ծառայել

$$2x - 3y + 3 = 0 \qquad (2)$$

հավասարումը:

Նրա մեջ $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$: (0; 1) թվազույգը (2) հավասարման լուծում է: Բայց հեշտ է տեսնել, որ (2) հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Իրոք, եթե (2) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք ցանկացած x_0 թիվ, ապա կստանանք y անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում:

Լուծելով այն՝ կստանանք մի որևէ y_0 թիվ, որը տված x_0 թվի հետ միասին կազմում է $(x_0; y_0)$ թվազույգ, որը (2) հավասարման լուծում է:

Վերցնելով, օրինակ, $x_0 = 1$՝ կստանանք y անհայտով

$$2 \cdot 1 - 3y + 3 = 0$$

առաջին աստիճանի հավասարումը:

Նրա լուծումը $y_0 = \dfrac{5}{3}$ -ն է: Հետևաբար $\left(1; \dfrac{5}{3}\right)$ թվազույգը (2) հավասարման լուծում է:

Եթե (2) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք ցանկացած x_0 թիվ և լուծենք y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի ստացված

$$2x_0 - 3y + 3 = 0$$

հավասարումը, ապա կստանանք՝

$$-3y = -2x_0 - 3,$$

$$y = -\frac{2x_0}{-3} + \frac{-3}{-3},$$

$$y = \frac{2}{3}x_0 + 1: \qquad (3)$$

Հատևաբար յուրաքանչյուր x_0 թվի համապատասխանում է (2) հավասարման $(x_0; y_0)$ լուծում, որտեղ y_0-ն, ըստ տված x_0-ի, որոշվում է (3) բանաձևով:

Օրինակ, եթե $x_0 = 0$, ապա (3) բանաձևից հետևում է, որ $y_0 = 1$ և $(0; 1)$ թվազույգը (2) հավասարման լուծում է: Իսկ եթե $x_0 = 3$, ապա (3) բանաձևից հետևում է, որ $y_0 = 3$ և $(3; 3)$ թվազույգը (2) հավասարման լուծում է և այլն:

Կարելի է նաև ասել, որ (2) հավասարման ցանկացած լուծում է

$$(x_0; \frac{2}{3}x_0 + 1)$$

թվազույգը, որտեղ x_0-ն ցանկացած թիվ է:

Ընդհանրապես

$$ax + by + c = 0 \qquad (4)$$

տեսքի ցանկացած հավասարում, որի մեջ b գործակիցը զրոյից տարբեր է, ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որովհետև ցանկացած տված x_0 թվի համար այն կարելի է լուծել y անհայտի նկատմամբ, և այդ դեպքում ստացված

$$y_0 = \frac{-c - ax_0}{b}$$

թիվը x_0 տված թվի հետ կազմում է $(x_0; y_0)$ թվազույգ, որը (4) հավասարման լուծում է: Քանի որ x_0 թվերը անվերջ շատ են, ապա և (4) հավասարման լուծումները անվերջ շատ են:

x և y երկու անհայտներով տված հավասարումից y-ը արտահայտել x-ով՝ նշանակում է լուծել այդ հավասարումը y-ի նկատմամբ x-ի ցանկացած տված արժեքի համար:

Օրինակ:

$$2x - 5y + 2 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումից y-ը արտահայտենք x-ով և գրենք այդ հավասարման բոլոր լուծումները:

Լուծում: Վերցնենք կամայական x թիվ: Տեղադրենք այն (5) հավասարման մեջ և ստացված հավասարումից գտնենք y-ը՝

$$2x + 2 = 5y,$$

$$5y = 2x + 2,$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}: \qquad (6)$$

(6) բանաձևը y-ը արտահայտում է x-ով (5) հավասարումից: (5) հավասարման բոլոր լուծումները գրվում են

$$\left(x; \frac{2}{5}x + \frac{2}{2}\right)$$

տեսքով, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Դատելով նման կերպ՝ կստանանք, որ զրոյից տարբեր a գործակցով (4) տեսքի ցանկացած հավասարում ունի անվերջ թվով լուծումներ:

Բոլոր այդ լուծումները գրվում են

$$(-c - \frac{by}{a}; y)$$

տեսքով, որտեղ y-ը ցանկացած թիվ է:

1. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում: Բերեք օրինակներ:
բ) Ի՞նչն են անվանում $ax + by + c = 0$ հավասարման լուծում, որտեղ a և b գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի:

2. Քանի՞ լուծում ունի $x - y + 1 = 0$ հավասարումը:

3. Անվանեք $5x - 2y + 3 = 0$ հավասարման անդամները, x-ի և y-ի գործակիցները, ազատ անդամը:

4. Արդյոք տված հավասարումը երկու անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարո՞ւմ է (անվանեք անհայտների գործակիցները և ազատ անդամը).
ա) $3x - y + 5 = 0;$ բ) $2x - 5y - 1 = 0;$
գ) $2x + 3y - 1 = 0;$ դ) $0 \cdot x - 5y - 4 = 0;$

ե) $5x - 4 = 0$;
զ) $0 \cdot x + 0\,y = 0$;
է) $2y - 3x + 4 = 0$;
ը) $x - 0 \cdot y - 3 = 0$:

5. Տված a, b, և c թվերով կազմեք առաջին աստիճանի երկու անհայտով հավասարում.
ա) $a = 5$, $b = 4$, $c = -2$;
բ) $a = 0$, $b = -3$, $c = 4$;
գ) $a = 0$, $b = 2$, $c = -1$;
դ) $a = -5$, $b = -1$, $c = 0$:

6. Գրեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երեք հավասարումներ:

7. Ցույց տվեք, որ $(1; -1)$, $(5; -7)$, $(-3; 5)$ թվազույգերը $3x + 2y - 1 = 0$ հավասարման լուծումներ են:

8. Հետևյալ թվազույգերը $2x - y + 4 = 0$ հավասարման լուծումնե՞ր են.
ա) $(1; -2)$;
բ) $(0; 4)$;
գ) $(-2; 1)$;
դ) $(3; 4)$;
ե) $(5; 0)$;
զ) $(-2; 0)$:

9. $(1; 3)$ թվազույգը հավասարման լուծո՞ւմ է.
ա) $2x - 3y + 5 = 0$;
բ) $-x + y - 2 = 0$;
գ) $x - y - 6 = 0$;
դ) $7x - 3{,}2y + 4 = 0$;
ե) $x + 2y - 7 = 0$;
զ) $0 \cdot x - 7y + 21 = 0$:

10. Գտեք հավասարման երեք լուծում.
ա) $x + y - 5 = 0$;
բ) $y - 5 = 0$;
գ) $2x - y + 2 = 0$;
դ) $x + 3 = 0$:

Տված հավասարումից y-ը արտահայտեք x-ով.

11. ա) $x + y = 5$;
բ) $2x - y = 3$;
գ) $-3x + 2y = 7$;
դ) $3x - 5y = 8$;
ե) $-3{,}5x + 2y = 0{,}2$;
զ) $x - 0{,}3y - 0{,}2$:

12. ա) $4x - y + 3 = 0$;
բ) $x - 3y + 6 = 0$;
գ) $3x + y - 2 = 0$;
դ) $5x - 7y - 3 = 0$;
ե) $4x - 2y + 8 = 0$;
զ) $0{,}5x - 2y + 0{,}6 = 0$;
է) $\frac{1}{3}x - 0{,}2y + 1 = 0$;
ը) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - 2 = 0$:

13. Հավասարումից x-ը արտահայտեք y-ով.
ա) $x - 3y + 2 = 0$;
բ) $3x + 2y - 5 = 0$;

գ) $-x + 2y - 3 = 0$;

դ) $-5x - y + 7 = 0$;

ե) $2x - y + 4 = 0$;

զ) $2x - \frac{1}{2}y - 4 = 0$;

է) $2x - 0{,}3y - 1 = 0$;

ը) $\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}y + 4 = 0$:

14. Գրեք հավասարման որևէ լուծում.
ա) $4x - y - 2 = 0$;
բ) $3x + 2y - 7 = 0$;
գ) $x - 2y + 4 = 0$;
դ) $5x - 3y - 2 = 0$:

15. Կազմեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում հետևյալ պայմանից՝
ա) Երկու թվերի գումարը հավասար է 10:
բ) 2 լ կաթը և 3 բատոն հացը միասին արժեն 990 դրամ:
գ) Գրիչը մատիտից 700 դրամով թանկ է:
դ) 1 կգ սուրճը 3 կգ կոնֆետից 570 դրամով թանկ է:

16. ա) a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $(3; -2)$ թվազույգը $3x - ay - 4 = 0$ հավասարման լուծում է:
բ) b-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $(-1; -4)$ թվազույգը $bx - 7y - 3 = 0$ հավասարման լուծում է:

1.2 Երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգեր

Խնդիր: Հայտնի է, որ եղբոր ու քրոջ տարիքների տարբերությունը 3 է, իսկ գումարը՝ 15: Քանի՞ տարեկան է եղբայրը և քանի՞ տարեկան՝ քույրը:

Լուծում: Պետք է գտնել երկու անհայտ մեծություններ՝ եղբոր տարիքը և քրոջ տարիքը:

Դիցուք եղբայրը x տարեկան է, իսկ քույրը՝ y տարեկան: Քանի որ նրանց տարիքների տարբերությունը 3 է, ապա

$$x - y = 3, \qquad (1)$$

իսկ քանի որ եղբոր և քրոջ տարիքների գումարը 15 է, ապա

$$x + y = 15: \qquad (2)$$

Որոնելի x և y թվերը պետք է բավարարեն (1) և (2) հավասարումներին:

Հետևաբար մեր խնդիրը բերվեց միաժամանակ (1) և (2) հավասարումներին բավարարող x և y թվերի զույգ գտնելուն:

Այսպիսի դեպքերում ասում են, որ տրված է x և y երկու անհայտով երկու հավասարման համակարգ՝

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 15: \end{cases}$$

Այս համակարգի համար կարելի է ընտրել այսպիսի թվերի զույգ՝ $x = 9$, $y = 6$: Հետևաբար եղբայրը 9 տարեկան է, քույրը՝ 6 տարեկան:

Պատասխան՝ 9 և 6 տարեկան:

Հաջորդ կետում մենք ցույց կտանք, ինչպես փնտրել այդպիսի համակարգերի լուծումները:

Դիցուք տրված են x և y երկու անհայտներով երկու առաջին աստիճանի հավասարումներ՝

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ և } a_2x + b_2y + c_2 = 0: \tag{3}$$

Ասում են, որ տրված է ***x և y երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարման համակարգ,*** եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն $(x_0; y_0)$ թվազույգերը, որոնք միաժամանակ (3)-ի և՛ առաջին, և՛ երկրորդ հավասարումների լուծումներն են:

Սովորաբար համակարգի հավասարումները գրում են սյունակով՝ մեկը մյուսի տակ, և դրանք ձախից միավորում ձևավոր փակագծով՝

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0: \end{cases} \tag{4}$$

(4) ***համակարգի լուծում*** անվանում են այնպիսի $(x_0; y_0)$ թվազույգը, որ (4) համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծում է:

Լուծել համակարգը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ լուծումներ չկան:

Բերենք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգերի օրինակներ.

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y + 4 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - 2y + 3 = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0, \\ 6x + 3y + 6 = 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} 3x + 0y + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} 2x + 0y - 5 = 0, \\ 3x + 0y + 2 = 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} 5x + 0y - 1 = 0, \\ 0x + 3y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Եթե (4) հավասարումների համակարգում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և բավարարում են $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ պայմանին, ապա ասում են, որ այդ համակարգի հավասարումներն ունեն անհայտների ***համեմատական գործակիցներ:***

Օրինակ, (6) համակարգի հավասարումներն ունեն անհայտների համեմատական գործակիցներ: (7) համակարգի հավասարումները նույնպես ունեն անհայտների համեմատական գործակիցներ, ավելին՝ նրանք համեմատական են նաև ազատ անդամներին՝ $2 : 6 = 1 : 3 = 2 : 6$:

Եթե (4) համակարգում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և բավարարում են $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$ պայմանին, ապա ասում են, որ (4) համակարգի հավասարումների անհայտների գործակիցները համեմատական չեն:

Օրինակ, (5) համակարգի հավասարումների անհայտների ***գործակիցները համեմատական չեն:***

Սովորաբար հավասարումներում $0 \cdot x$ և $0 \cdot y$ տեսքի անդամները բաց են թողնում, այդ դեպքում (8), (9) և (10) համակարգերը կգրառվեն հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \qquad (8')$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 0, \\ 3x + 2 = 0; \end{cases} \qquad (9')$$

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0: \end{cases} \qquad (10')$$

17. Գրեք երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգ:

18. Պարզեք՝ $(-3; 1)$ թվազույգը համակարգի լուծո՞ւմ է.

ա) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x - 3y - 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y + 5 = 0: \end{cases}$

19. ա) Ի՞նչն են անվանում երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծում:
բ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել համակարգը:

20. Բերեք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգերի օրինակներ, որոնցում անհայտների գործակիցները

ա) համեմատական են, բ) համեմատական չեն:

21. Համակարգի հավասարումներում անվանեք գործակիցները և ազատ անդամները.

ա) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 4 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -2x - 6 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} -3x - 2y + 7 = 0, \\ 2x + 5 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} -4x - 5 = 0, \\ 2y + 4 = 0: \end{cases}$

22. Անհայտների տրված a, b, a_1, b_1 գործակիցներով և c ու c_1 ազատ անդամներով կազմեք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգ:

a	b	c	a_1	b_1	c_1
2	–3	1	1	5	4
–2	1	0	3	1	–7
0	–4	–2	–1	0	0
–1	1	–4	0	–5	3

23. Ցույց տվեք, որ (1; 2) թվազույգը համակարգի լուծում է.

ա) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2{,}5x - 2{,}5 = 0, \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0, \\ 4x - y - 2 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 0{,}35x + 1{,}6y - 3{,}55 = 0, \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{7} + \frac{5}{42} = 0: \end{cases}$

24. Ցույց տվեք, որ (–2; 1) թվազույգը համակարգի լուծում չէ.

ա) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0, \\ x + y - 3 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0, \\ 3x - 4 = 0: \end{cases}$

25. (2; 1), (1; 2), (5; –3), (0; 2), (1; 0), (1; –4) թվազույգերից որո՞նք են համակարգի լուծում.

ա) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ 2x + 3y - 6 = 0: \end{cases}$

26. (−1; 4) թվազույգը համակարգի լուծո՞ւմ է.

ա) $\begin{cases} -x + y - 3 = 0, \\ 2x - y + 6 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 5y - 2 = 0, \\ 2x + 3y - 10 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \text{գ) } x - 2y - 5 = 0; \\ 6x + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} -3y + 12 = 0, \\ 6x + y + 2 = 0: \end{cases}$

27. *a*-ի և *b*-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում (1; 0) թվազույգը համակարգի լուծում է.

ա) $\begin{cases} 2x + y = a, \\ \mathrm{b}x - y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x - ay = 3, \\ 2x + y = b: \end{cases}$

28. Ելնելով տված պայմանից, կազմեք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգ.
ա) երկու թվերի գումարը 7 է, իսկ տարբերությունը՝ 2,
բ) երկու թվերի տարբերությունը 12 է, իսկ գումարը՝ 27:

1.3 Տեղադրման եղանակը

Այս կետում դիտարկվում են երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգեր, որոնցում անհայտների բոլոր գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն:

Յուրաքանչյուր այդպիսի համակարգ ունի միակ լուծում:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y - 27 = 0: \end{cases} \qquad (1)$$

հավասարումների համակարգը:

Դիցուք (x_0; y_0) թվազույգը (1) համակարգի լուծում է: Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ կստանանք ճիշտ թվային հավասարություններ՝

$$2x_0 - y_0 + 4 = 0,$$
$$3x_0 + 4y_0 - 27 = 0: \qquad (2)$$

Առաջին թվային հավասարությունից y_0-ն արտահայտենք x_0-ով՝

$$y_0 = 2x_0 + 4: \qquad (3)$$

Այժմ (2)-ի երկրորդ թվային հավասարությունում y_0-ն փոխարինենք իրեն հավասար $2x_0 + 4$ թվով, այսինքն երկրորդ հավասարությունում y_0-ի փոխարեն տեղադրենք $2x_0 + 4$:

Կստանանք

$$3x_0 + 4\,(2x_0 + 4) - 27 = 0$$

ճիշտ թվային հավասարությունը, այսինքն կստանանք, որ x_0 թիվը բավարարում է

$$3x + 4(2x + 4) - 27 = 0$$

հավասարմանը:

Լուծելով այդ հավասարումը՝ գտնում ենք, որ $x_0 = 1$:

Տեղադրելով գտնված արժեքը (3) հավասարության մեջ՝ ստանում ենք, որ

$$y_0 = 6:$$

Այսպիսով, եթե (1) համակարգն ունի $(x_0; y_0)$ լուծում, ապա

$$x_0 = 1,\ y_0 = 6:$$

Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ համոզվում ենք, որ դրանք, իրոք՝ բավարարում են այդ հավասարումներին:

Հետևաբար (1) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (1; 6): Նկատենք, որ նույն արդյունքը մենք կստանայինք, եթե երկրորդ հավասարությունից y_0-ն արտահայտեինք x_0-ով և y_0-ի համար ստացված արտահայտությունը տեղադրեինք առաջին հավասարության մեջ.

Կարելի է նաև այս դատողություններում (2)-ի որևէ հավասարությունից x_0-ն արտահայտել y_0-ով և ստացված արտահայտությունը տեղադրել (2)-ի մյուս հավասարության մեջ:

Նմանատիպ դատողություններ կարելի է կատարել նաև

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

ցանկացած հավասարումների համակարգի համար, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն: (Համեմատական գործակիցներով հավասարումների համակարգեր մենք կուսումնասիրենք ավելի ուշ):

Վերը դիտարկվածից բխում է (4) համակարգի լուծման հետևյալ եղանակը, որն անվանում են ***տեղադրման եղանակ:***

Որպեսզի լուծենք (4) համակարգը, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն, անհրաժեշտ է՝

1) անհայտներից մեկը (օրինակ՝ y-ը) համակարգի հավասարումներից որևէ մեկից արտահայտել մյուս անհայտով,
2) ստացված արտահայտությունը տեղադրել համակարգի մյուս հավասարման մեջ y-ի փոխարեն,
3) լուծել ստացված մեկ x անհայտով հավասարումը,
4) տեղադրելով ստացված x_0 արժեքը y-ի բանաձևի մեջ՝ գտնել y_0-ն:

Հենց $(x_0; y_0)$ թվազույգը կլինի համակարգի միակ լուծումը:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$\begin{cases} 4x-5y-1=0 \\ 7x-y+6=0 \end{cases} \qquad (5)$$

հավասարումների համակարգը:

(5) համակարգի երկրորդ հավասարումից y-ն արտահայտենք x-ով՝

$$y = 7x + 6 \qquad (6)$$

և առաջին հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $7x + 6$՝

$$4x - 5\,(7x + 6) - 1 = 0 \qquad (7)$$

Լուծելով (7) հավասարումը՝ գտնում ենք նրա միակ արմատը՝ $x_0 = -1$: Տեղադրելով x_0-ն (6) հավասարության մեջ՝ գտնում ենք, որ

$$y_0 = 7x_0 + 6 = 7 \cdot (-1) + 6 = -1:$$

Նշանակում է (5) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $(-1; -1)$:

29. Քանի լուծում ունի երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգը, որի անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն:

Տեղադրման եղանակով լուծեք հավասարումների համակարգը (30-31).

30. ա) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 2x-3y-7=0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x+5y=0, \\ 3x+7y-16=0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y-3x=0, \\ x-2y+10=0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 7x-y=0, \\ 3x-y+12=0: \end{cases}$

31. ա) $\begin{cases} x-y-1=0, \\ x+y-5=0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x-y-2=0, \\ x+y-6=0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x-y-2=0, \\ 3x-2y-9=0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x-2y-3=0, \\ 5x+y-4=0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x+2y-11=0, \\ 4x-5y+8=0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x+4y-2=0, \\ 3x+8y-2=0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x+4y-90=0, \\ x-3y-10=0; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 3x-2y-4=0, \\ x+5y-7=0; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} 3x-4y-7=0, \\ x+2y+1=0; \end{cases}$ ժ) $\begin{cases} 7x-2y-6=0, \\ x+4y+12=0; \end{cases}$

ի) $\begin{cases} x - y - 12 = 0, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases}$ լ) $\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0, \\ x - y + 6 = 0: \end{cases}$

Լուծեք հավասարումների համակարգը (32-33).

32. ա) $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0, \\ x - 3y - 11 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 3x + 2y + 5 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3x + y + 5 = 0, \\ x - 3y - 5 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 5x + y - 15 = 0, \\ x - 2y - 14 = 0: \end{cases}$

33. ա) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x - 3y - 5 = 0, \\ 6x + 8y + 11 = 0: \end{cases}$

1.4 Գործակիցների հավասարեցման (գումարման) եղանակը

Մենք շարունակում ենք դիտարկել երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգեր, որոնցում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն: Ինչպես արդեն նշվել է, յուրաքանչյուր այդպիսի համակարգ ունի միակ լուծում:

Այդպիսի համակարգերի լուծման տեղադրման եղանակից բացի կա նաև այլ եղանակ, որն անվանվում է գործակիցների հավասարեցման կամ գումարման եղանակ:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

համակարգը:

Ենթադրենք $(x_0; y_0)$ թվազույգը (1) համակարգի լուծում է: Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ կստանանք ճիշտ թվային հավասարություններ՝

$$2x_0 + 3y + 1 = 0,$$
$$3x_0 + 4y_0 + 2 = 0 \qquad (2)$$

Այս հավասարություններում x_0-ի գործակիցները դարձնենք իրար հավասար: Դրա համար առաջին հավասարությունը բազմապատկենք

3-ով, իսկ երկրորդը՝ 2-ով՝

$$\begin{array}{l|l} 2x_0 + 3y_0 + 1 = 0, & 3 \\ 3x_0 + 4y_0 + 2 = 0: & 2 \end{array}$$

Կստանանք

$$6x_0 + 9y_0 + 3 = 0,$$
$$6x_0 + 8y_0 + 4 = 0$$

ճիշտ թվային հավասարությունները:

Առաջին հավասարությունից հանելով երկրորդը՝ կստանանք $y_0 - 1 = 0$ ճիշտ թվային հավասարությունը, որտեղից՝ $y_0 = 1$:

Տեղադրենք այդ թիվը (2) հավասարություններից առաջինի մեջ՝

$$2x_0 + 3 \cdot 1 + 1 = 0,$$

որտեղից ստանում ենք $x_0 = -2$:

Այսպիսով, եթե (1) համակարգն ունի (x_0; y_0) լուծում, ապա դա կարող է լինել միայն $x_0 = -2$, $y_0 = 1$ թվերի զույգը:

Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ համոզվում ենք, որ դրանք, իրոք բավարարում են այդ հավասարումներին:

Հետևաբար (1) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (–2; 1): Մենք y_0-ի փոխարեն 1 թիվը տեղադրեցինք (2) հավասարություններից առաջինի մեջ, սակայն արդյունքը նույնը կլիներ, եթե այդ թիվը տեղադրեինք (2) հավասարություններից երկրորդի մեջ:

Իրոք, այդ դեպքում երկրորդ հավասարությունը կգրվեր $3x_0 + 4 \cdot 1 + 2 = 0$ տեսքով: Այստեղից ստանում ենք, որ $x_0 = -2$: Մենք նորից ստացանք արդեն գտնված (–2; 1) լուծումը: (2) հավասարություններում x_0-ի գործակիցները հավասարեցնելու փոխարեն կարելի է հավասարեցնել y_0-ի գործակիցները: Արդյունքը կլինի նույնը: (Դրանում համոզվեք ինքնուրույն):

Նման դատողություններ կարելի է անել նաև ցանկացած

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգի համար, եթե նրանում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն:

Վերը դիտարկվածից բխում է (3) համակարգի լուծման հետևյալ եղանակը, որն անվանում են ***գործակիցների հավասարեցման եղանակ կամ գումարման եղանակ:***

(3) հավասարումների համակարգը լուծելու համար, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն, անհրաժեշտ է՝

1) բազմապատկելով զրոյից տարբեր թվերով՝ երկու հավասարումներում էլ իրար հավասարեցնել անհայտներից մեկի, օրինակ x-ի, գործակիցները,
2) մի հավասարումը հանել մյուսից,

3) լուծել ստացված մեկ y անհայտով հավասարումը,

4) տեղադրել ստացված y_0 արժեքը համակարգի հավասարումներից որևէ մեկի մեջ և գտնել ստացված մեկ անհայտով հավասարման x_0 լուծումը:

Այդ դեպքում գտնված $(x_0; y_0)$ թվազույգը կլինի համակարգի միակ լուծումը:

Օրինակ 2: Գումարման եղանակով լուծենք

$$\begin{cases} 6x + 7y + 17 = 0, \\ 4x + 5y + 9 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

համակարգը:

Այս համակարգի առաջին հավասարումը բազմապատկելով 2-ով, իսկ երկրորդը՝ 3-ով՝ (4) համակարգը արտագրենք

$$\begin{cases} 12x + 14y + 34 = 0, \\ 12x + 15y + 27 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

տեսքով:

(5) համակարգի երկրորդ հավասարումից հանելով առաջինը՝ կստանանք մեկ y անհայտով գծային հավասարում՝

$$y - 7 = 0,$$

որտեղից՝ $y = 7$: y-ի փոխարեն տեղադրելով 7 թիվը (4) համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$6x + 49 + 17 = 0,$$

որտեղից՝ $x = -11$:

Հետևաբար (4) համակարգն ունի $(-11; 7)$ միակ լուծումը:

Եթե համակարգի հավասարումներում անհայտների գործակիցները հակադիր թվեր են, ապա այդ հավասարումները հարմար է գումարել:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ -x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

հավասարումների համակարգը:

Գումարելով (6) համակարգի հավասարումները՝ ստանում ենք

$$5y - 10 = 0$$

գծային հավասարումը, որտեղից $y = 2$: (6) համակարգի առաջին հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով 2՝ կստանանք

$$x + 4 - 3 = 0,$$

որտեղից $x = -1$:

Հետևաբար (6) համակարգն ունի $(-1; 2)$ միակ լուծումը:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (34-36).

34. ա) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0, \\ x + y - 1 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 4x + y - 2 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \text{դ) } x - y - 7 = 0, \\ 3x - y + 1 = 0\text{:} \end{cases}$

35. ա) $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ -x + 4y + 8 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ -x + 3y - 2 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 3x + y - 4 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ -x - y + 4 = 0\text{:} \end{cases}$

36. ա) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ 2x - 3y + 8 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0, \\ 3x + 4y - 7 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} -6x + 2y + 6 = 0, \\ 5x - y - 17 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0, \\ 2x - y - 5 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 2x + 5y - 15 = 0, \\ 3x + 2y - 6 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 11 = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0, \\ 3x - 5y - 45 = 0\text{:} \end{cases}$

37. Հավասարումների համակարգը լուծեք տեղադրման եղանակով և գործակիցների հավասարեցման եղանակով.

ա) $\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0, \\ x - 3y + 8 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 6x - 2y - 6 = 0, \\ 5x - y - 7 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ 3x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 7x - 2y + 15 = 0, \\ x - 3y - 6 = 0\text{:} \end{cases}$

38. Լուծեք հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 3 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 9x - 3y + 6 = 0, \\ 4x - y + 2 = 0\text{:} \end{cases}$

1.5 Հավասարումների և հավասարումների համակարգերի համարժեքությունը

Հավասարումը, որի ձախ և աջ մասերը x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամներ կամ թվեր են, անվանում են x և y երկու փոփոխականներով գծային հավասարում:

$$2x - 3y + 1 = 0,$$
$$5x - 4y = 3x - 1,$$
$$2x - 3\,y = 5,$$
$$3x - y + 1 = 3x - y - 1,$$

հավասարումները գծային հավասարումների օրինակներ են:

Գծային հավասարման ձախ և աջ մասերում գտնվող բազմանդամների անդամներն անվանում են այդ հավասարման անդամներ:

Երկու հավասարումներ անվանում են համարժեք, եթե առաջին հավասարման ցանկացած լուծում լուծում է նաև երկրորդ հավասարման համար, իսկ երկրորդի ցանկացած լուծում նաև առաջինի լուծում է: Համարժեք են նաև այնպիսի երկու հավասարումները, որոնցից յուրաքանչյուրը լուծում չունի:

1) Եթե հավասարման երկու մասը բազմապատկենք զրոյից տարբեր միևնույն թվով (կամ բաժանենք զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա), ապա կստանանք սկզբնական հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Օրինակ,

$$2x - 3y + 1 = 0 \text{ և } 4x - 6y + 2 = 0$$

հավասարումները համարժեք են:

2) Եթե հավասարման որևէ անդամ հակադիր նշանով տեղափոխենք նրա մի մասից մյուսը, ապա կստանանք սկզբնական հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Օրինակ,

$$5x - 4y = 3x - 1 \text{ և } 5x - 4y - 3x + 1 = 0$$

հավասարումները համարժեք են:

3) Եթե գծային հավասարման ձախ և աջ մասերում կատարվի նման անդամների միացում, ապա կստացվի սկզբնական հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Օրինակ,

$$2x - 7 + 3x - 4 = y \text{ և } 5x - 11 = y$$

հավասարումները համարժեք են:

Այս պնդումների ապացույցները կատարվում են նույն կերպ, ինչպես մեկ անհայտով գծային հավասարման դեպքում:

Եթե ցանկացած գծային հավասարման մեջ բոլոր անդամները տեղափոխենք ձախ մաս և կատարենք նման անդամների միացում, ապա կստացվի, որ այն համարժեք է

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

հավասարմանը, որում a, b և c-ն որոշակի թվեր են:

Ընդ որում, եթե a և b թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա (1) հավասարումը, ինչպես արդեն ասվել է, առաջին աստիճանի հավասարում է:

Ենթադրենք (1) հավասարման մեջ $a = b = 0$, $c \neq 0$, այդ դեպքում հավասարումն ունի

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$

տեսքը և ոչ մի $(x; y)$ թվազույգ չի բավարարում այդ հավասարմանը, այսինքն (1) հավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a = b = c = 0$, ապա (1) հավասարմանը բավարարում են ցանկացած $(x; y)$ թվազույգեր:

Հավասարումների երկու համակարգեր անվանում են համարժեք, եթե առաջին համակարգի ցանկացած լուծում երկրորդ համակարգի լուծում է, և երկրորդ համակարգի ցանկացած լուծում առաջին համակարգի լուծում է: Համարժեք են նաև այն համակարգերը, որոնցից յուրաքանչյուրը լուծում չունի:

Ակնհայտ է, որ եթե համակարգի հավասարումներից մեկը փոխարինվի իրեն համարժեք հավասարումով, ապա ստացված համակարգը համարժեք կլինի սկզբնական համակարգին:

Այսպես, օրինակ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

համակարգը համարժեք է

$$\begin{cases} y = -2x + 1, \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

համակարգին:

Ստորև համարժեքության հասկացությունը կիրառվում է անհայտների՝ զրոյից տարբեր և համեմատական գործակիցներով առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգերի լուծման դեպքում:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

հավասարումների համակարգը:

Այս համակարգում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր և համեմատական են:

(2) համակարգի երկրորդ հավասարումը բաժանելով 2-ի՝ կստանանք (2) համակարգին համարժեք

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x+y+\dfrac{3}{2}=0, \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգը:

Այս համակարգի հավասարումների ազատ անդամները տեղափոխելով նրանց աջ մասերը՝ կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (4)$$

որը համարժեք է (3) համակարգին և հետևաբար (2) համակարգին:

Ակնհայտ է, որ ոչ մի $(x; y)$ թվազույգ չի կարող բավարարել (4) համակարգին, որովհետև միևնույն $x+y$ թիվը միաժամանակ չի կարող հավասար լինել և՛ 1-ի, և՛ $-\dfrac{3}{2}$-ի:

Այսպիսով, (4) համակարգը և հետևաբար նրան համարժեք (2) համակարգը լուծումներ չունեն: Այդպիսի համակարգը անվանում են հակասական:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+2=0 \end{cases} \qquad (5)$$

հավասարումների համակարգը:

Այստեղ նույնպես գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական: Ավելին, նրանք համեմատական են ազատ անդամներին՝

$$1:2=1:2=1:2$$

Համակարգի երկրորդ հավասարումը բաժանելով 2-ի, կստանանք (5) համակարգին համարժեք

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+y+1=0 \end{cases} \qquad (6)$$

համակարգը:

Ակնհայտ է, որ (6) համակարգի լուծումների բազմությունը համընկնում է

$$x+y+1=0$$

մեկ հավասարման լուծումների բազմության հետ:

Այդ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ $(x; y)$ լուծումներ, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, իսկ $y=-x-1$: Դրա համար էլ (5) համակարգի բոլոր լուծումներն ունեն $(x; -x-1)$ տեսքը, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Վերը բերված դատողությունները նման ձևով կարելի է կիրառել ցանկացած

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \qquad (7)$$

տեսքի համակարգ լուծելիս, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական: Եթե (7) համակարգի գործակիցները բավարարում են

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

պայմանին, ապա այդ համակարգը լուծում չունի: Իսկ եթե (7) համակարգի գործակիցները բավարարում են

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

պայմանին, ապա այդ համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որոնք համընկնում են այդ համակարգի հավասարումներից որևէ մեկի լուծումների բազմության հետ: Այդպիսի համակարգերը կարելի է լուծել այնպես, ինչպես դա արվեց 1 և 2 օրինակներում:

(2) և (5) համակարգերը լուծենք տեղադրման եղանակով:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի առաջին հավասարումից y-ը արտահայտենք x-ով՝

$$y = -x + 1$$

և համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $(-x + 1)$.

$$2x + 2(-x + 1) + 3 = 0:$$

Կստանանք $0 \cdot x + 5 = 0$ հավասարումը, որը ցույց է տալիս, որ տված համակարգը լուծում չունի:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի առաջին հավասարումից y-ը արտահայտենք x-ով՝

$$y = -x - 1$$

և համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $(-x - 1)$.

$$2x + 2(-x - 1) + 2 = 0:$$

Կստանանք $0 \cdot x + 0 = 0$ հավասարումը, որը ցույց է տալիս, որ $(-x - 1)$ թվին հավասար y թիվը բավարարում է համակարգի ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ հավասարումներին x-ի ցանկացած արժեքների դեպքում: Հետևաբար տվյալ համակարգի բոլոր լուծումներն ունեն $(x; -x - 1)$ տեսքը, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

39. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երկու անհայտով գծային հավասարում:
բ) Ի՞նչն են անվանում գծային հավասարման անդամներ:
գ) Երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումը գծային հավասարո՞ւմ է:

40. Բերեք երկու անհայտով գծային հավասարման օրինակ, որը առաջին աստիճանի հավասարում չէ:

41. ա) Ինչպիսի՞ երկու հավասարումներն են անվանում համարժեք:
բ) Ձևակերպեք պնդումներ գծային հավասարումների համարժեքության մասին:
գ) Ինչպիսի՞ երկու համակարգերն են անվանում համարժեք:
դ) Ձևակերպեք պնդումներ հավասարումների համակարգերի համարժեքության մասին:

42. Ի՞նչ պայմանի դեպքում երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգը, որում անհայտների գործակիցները համեմատական են
ա) լուծում չունի, բ) ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:
Կարելի՞ է արդյոք այդպիսի համակարգերը լուծել տեղադրման եղանակով:

43. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.
ա) $2x - 2y = x$ և $x - y = 0$;
բ) $3x - 5y = 0$ և $3x = 5y$;
գ) $3x - 6 + 2y = 0$ և $2 - x - 2y = 0$;
դ) $x + y - 5 = 0$ և $x = 5 - y$:

44. Ապացուցեք, որ հավասարումները համարժեք են.
ա) $2x - 3y + y = 4x - 2$ և $x + y = 1$;
բ) $5(x + y) + 1 = x + 3$ և $4x + 5y - 2 = 0$:

45. Կազմեք տված հավասարմանն համարժեք հավասարում.
ա) $4x - 2 + y = 0$; բ) $5x + 4y - 2 = 2x - 3y + 5$;
գ) $3x + 6y - 9 = 0$; դ) $x - y - 1 = 0$:

46. Համարժե՞ք են արդյոք երկու անհայտով հավասարումները, եթե նրանցից յուրաքանչյուրի լուծումները նաև մյուսի լուծումներ են:

47. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումների համակարգերը.

ա) $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} x = y - 3, \\ 2(y - 3) + y - 4 = 0; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ 2x - 1 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 4x - 2y - 5 = 0, \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 4(2 - y) - 2y - 5 = 0, \\ x = 2 - y; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} y = 1 - x, \\ 5x - 4 = 0: \end{cases}$

48. Կազմեք տված համակարգին համարժեք երկու համակարգեր.

ա) $\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0, \\ -y = 5 - 2x: \end{cases}$

49. Ինչպիսի՞ a-ի դեպքում

$\begin{cases} ax - y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$ և $\begin{cases} x - 2 = -y \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

հավասարումների համակարգերը համարժեք են:

50. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումների համակարգերը.

$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 5x + y - 6 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + y + 2 = 0, \\ 5x - 2y - 3 = 0: \end{cases}$

1.6 Երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը

Դիցուք տված է երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգ:

Տեղափոխելով այդ հավասարումների աջ մասերի բոլոր անդամները ձախ մասեր և կատարելով նման անդամների միացում՝ կստանանք տված համակարգին համարժեք

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

համակարգը, որտեղ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2-ը որոշակի թվեր են:

Մենք արդեն գիտենք՝ ինչպես լուծել այդպիսի համակարգը, երբ անհայտների բոլոր a_1, b_1, a_2, b_2 գործակիցները զրոյից տարբեր են: Մենք նաև գիտենք, որ եթե անհայտների գործակիցները համեմատական չեն, ապա (1) համակարգի լուծումը գոյություն ունի և միակն է, իսկ եթե անհայտների գործակիցները համեմատական են, ապա կամ գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ լուծումներ, կամ ոչ մի լուծում չկա:

Մեզ մնում է դիտարկել այն դեպքերը, երբ որոշ անհայտների գործակիցներ հավասար են զրոյի: Դիտարկենք այդ դեպքերը օրինակներով:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

հավասարումների համակարգը:

Այս համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են, իսկ առաջին հավասարման մեջ x-ի գործակիցը զրոյից տարբեր է, իսկ y-ի գործակիցը զրո է:

Այս համակարգը հեշտ է լուծել տեղադրման եղանակով: Առաջին հավասարումից գտնենք x-ը՝

$$x = -\frac{1}{3}$$

և տեղադրենք երկրորդի մեջ: Կստանանք

$$2\left(-\frac{1}{3}\right) + y - 5 = 0,$$

որտեղից $y = 5\frac{2}{3}$:

Այսպիսով, $\left(-\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$ թվազույգը (2) համակարգի միակ լուծումն է:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

հավասարումների համակարգը:

(3) համակարգը (1) համակարգի մասնավոր դեպքն է, որտեղ

$$a_1 = 5,\ b_1 = 0,\ c_1 = -1,\ a_2 = 0,\ b_2 = 3,\ c_2 = 2:$$

Այս համակարգի միակ լուծումը $\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$ թվազույգն է:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\begin{cases} 2y + 3 = 0, \\ y + \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից ստանում ենք

$$y = -\frac{3}{2}:$$

Քանի որ (4) համակարգը մենք դիտարկում ենք որպես (1) համակարգի մասնավոր դեպք, որտեղ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ապա (4) համակարգը կարելի է գրառել այսպես՝

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 2y + 3 = 0, \\ 0 \cdot x + y + \dfrac{3}{2} = 0: \end{cases}$$

Այստեղ x-ը կարող է լինել ցանկացած թիվ, իսկ $y = -\frac{3}{2}$:

Այսպիսով, (4) համակարգի բոլոր լուծումները գրվում են $\left(x; -\frac{3}{2}\right)$ թվազույգերի տեսքով, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x - 5 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

հավասարումների համակարգը:

Այս համակարգը հակասական է (լուծումներ չունի), որովհետև x-ը միաժամանակ չի կարող հավասար լինել և՛ 2-ի, և՛ $\frac{5}{2}$-ի:

Օրինակ 5: Լուծենք

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

հավասարումների համակարգը:

Եթե $c_2 \neq 0$, ապա այս համակարգը հակասական է, որովհետև ոչ մի $(x; y)$ թվազույգ չի բավարարում (6) համակարգի երկրորդ հավասարմանը:

Եթե $c_2 = 0$, ապա երկրորդ հավասարումը դառնում է ճիշտ թվային հավասարություն x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների համար: Մնում է միայն առաջին հավասարումը: Այն արդեն դիտարկվել է: Հետևաբար առաջին հավասարման բոլոր լուծումները հանդիսանում են համակարգի լուծումներ, իսկ ինչպես լուծել մեկ հավասարումը՝ մենք արդեն գիտենք:

51. Կարո՞ղ է արդյոք երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգը լուծում չունենալ, ունենալ մեկ լուծում, ունենալ անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Բերեք օրինակներ:

52. (2; 1) և (1; 2) թվազույգերը

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծո՞ւմ են:

53. Հանդիսանո՞ւմ է արդյոք հավասարումների համակարգը հակասական, անթիվ բազմությամբ լուծումներ ունեցող, միակ լուծում ունեցող.

ա) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x + y = 9; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2: \end{cases}$

Լուծեք հավասարումների համակարգը (54-55).

54. ա) $\begin{cases} x = 3, \\ x + y - 4 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0, \\ x = -2; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0, \\ y - 1 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0, \\ y = -5: \end{cases}$

55. ա) $\begin{cases} 4x + 4y = 2, \\ 2x - 2y = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x + 3y = 6; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x - 4 = 2y: \end{cases}$

56. Կազմեք երկու գծային հավասարումների համակարգ, այնպիսին, որ նրա հավասարումներից մեկը լինի $3x - 4y = 2$ և
ա) համակարգը լինի հակասական,
բ) համակարգն ունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (57-59).

57. ա) $\begin{cases} x - y = 5, \\ -4x + 4y = 20; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0, \\ 5x + 6y = 7; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y + 1 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 7x + 6y = 1{,}5, \\ 4x - 9y - 5 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 3x + 4y = 3{,}5, \\ -3x - 4y = 40: \end{cases}$

58. ա) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{y+4}{6} = 2, \\ \dfrac{1}{3}(x+2) - y = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2} + \dfrac{y}{5} + 4 = 0, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-2}{3} = 2, \\ \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y+1}{3} = 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{9} - \dfrac{x-y}{3} = 2, \\ \dfrac{2x-y}{6} - \dfrac{3x+2y}{3} = -20; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} \dfrac{2x}{9} + \dfrac{y}{4} = 0, \\ \dfrac{5x}{12} + \dfrac{y}{3} = 1; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = 2\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3x}{2} + 2y = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8, \\ \dfrac{x+3}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5} - \dfrac{3y-2}{4} = 2, \\ \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{3y+2}{4} = 0: \end{cases}$

59. ա) $\begin{cases} x + 5 = 5 + 3x, \\ x - 3 = 9x + 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y + 3 = 2y - 4, \\ 2x + 3 = x; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3y - 4 = 2 - 3y, \\ y = \dfrac{11}{3} - 3y; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + y = x + y, \\ x - y + 2 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 2x + 3y = 2x + 3y + 2, \\ x - 7y + 1 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 3x + 5y = 5(x + 3y) - 2(x + 5y), \\ y - 3 + x = 2x + (x + y - 3); \end{cases}$

է) $\begin{cases} 3x + 4y + 1 = (x + y - 2) + (2x + 3y + 3), \\ 2x = x + (2 + x): \end{cases}$

1.7* Երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգեր[1]

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

հավասարումը, որտեղ a, b, c և d-ն տված թվեր են, ընդ որում a, b և c թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, անվանում են ***երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում:***

$(x_0; y_0; z_0)$ թվերի եռյակը անվանում են (1) հավասարման լուծում, եթե այդ թվերը բավարարում են (1) հավասարմանը, այսինքն՝ (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0, y-ի փոխարեն՝ y_0, z-ի փոխարեն՝ z_0, (1) հավասարումը դառնում է ճիշտ թվային հավասարություն՝

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0: \quad (2)$$

Նման կերպ սահմանվում են չորս, հինգ և այլն անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարումը և նրա լուծումը:

Դիցուք տրված են x, y և z երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումներ: Ասում են, որ տրված է x, y և z երեք անհայտով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգ, եթե պահանջվում է գտնել $(x; y; z)$ թվերի եռյակներ, որոնք միաժամանակ այդ երեք հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումն են: Այդպիսի եռյակներն անվանում են տվյալ համակարգի լուծումներ:

Նման կերպ սահմանվում են երեք, չորս և այլն անհայտով երեք, չորս և այլն առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգը և նրա լուծումը:

Լուծել հավասարումների համակարգը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ լուծումներ չկան:

Մենք արդեն ուսումնասիրել ենք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգերը: Ցանկացած այդպիսի համակարգ կարելի է լուծել տեղադրման եղանակով: Բերենք երեք անհայտով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծման օրինակ և ցույց տանք, որ այդ համակարգերը նույնպես կարելի է լուծել տեղադրման եղանակով:

Օրինակ: Լուծենք

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

հավասարումների համակարգը:

Ցույց տանք, ինչպես կարելի է լուծել այս համակարգը տեղադրման եղանակով: (3) համակարգի երրորդ հավասարումից x-ն արտահայտենք y և z-ով՝

$$x = y - z \quad (4)$$

---

[1] *-ով նշված թեմաները նախատեսված չեն պարտադիր ուսուցման համար:

և $y - z$-ը x-ի փոխարեն տեղադրենք (3) համակարգի առաջին և երկրորդ հավասարումների մեջ: Կստանանք

$$\begin{cases} 2(y - z) - 3y + z - 1 = 0, \\ 3(y - z) - 4y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

հավասարումները, որոնք նման անդամների միացումից հետո կգրվեն այսպես՝

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0, \\ -y - 4z + 2 = 0: \end{cases} \qquad (5)$$

Այսպիսով, տեղադրման եղանակով կարելի է x, y և z երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծումը բերել y և z երկու անհայտներով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծման:

Լուծելով (5) համակարգը՝ գտնում ենք, որ $y_0 = -2$, $z_0 = 1$: y_0-ի և z_0-ի այս արժեքները տեղադրելով (4) արտահայտության մեջ՝ գտնում ենք, որ

$$x_0 = -3:$$

Այսպիսով, (3) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x_0 = -3$, $y_0 = -2$, $z_0 = -1$:

Ընդհանուր դեպքում x, y և z երեք անհայտով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգ լուծելիս կարելի է վարվել նույն կերպ, ինչպես այս օրինակում: Օգտվելով համակարգի հավասարումներից մեկից՝ անհայտներից մեկը, օրինակ z-ը պետք է արտահայտել մնացած անհայտներով և z-ի համար ստացված արտահայտությունը տեղադրել համակարգի մնացած երկու հավասարումներում z-ի փոխարեն: Այնուհետև անհրաժեշտ է լուծել x և y երկու անհայտով երկու հավասարումների ստացված համակարգը:

Եթե այդ համակարգն ունի միակ լուծում՝ $(x_0; y_0)$, ապա x_0-ն և y_0-ն տեղադրելով z-ի արտահայտության մեջ՝ գտնում ենք z_0-ն, և հենց $(x_0; y_0; z_0)$ եռյակը կլինի համակարգի միակ լուծումը: Իսկ եթե այդ համակարգը լուծում չունի, ապա սկզբնական համակարգը նույնպես լուծում չունի: Վերջապես, եթե այդ համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, ապա և սկզբնական համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Նման կերպ լուծում են նաև չորս, հինգ և այլն անհայտներով հավասարումների համակարգերը:

60. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում:
բ) Ի՞նչն են անվանում երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման լուծում:

գ) Ի՞նչն են անվանում երեք անհայտով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծում:
դ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել հավասարումը:
ե) Ո՞րն է երեք անհայտով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծման տեղադրման եղանակը:

61 Լուծեք հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} x = 1, \\ 3x + 2y - 3z = 2, \\ 5x - y - 5z = -1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3y = 12, \\ x + y + z = 7, \\ x - 2y + 2z = -3; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x = 2y, \\ 3x - 2y - z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 8; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y + z = 6, \\ x - 5y + 3z = -4; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7, \\ x + 2y - z = 1, \\ 3x - 5y - 4z = 2; \end{cases}$

ը) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 17, \\ x + y - z = 6, \\ x - y - z = 0; \end{cases}$ է) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x - y + z = 3, \\ x + y - z = 3: \end{cases}$

1.8* Գաուսի մեթոդը

Կարլ Գաուս (1777-1855)

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման համար մենք կիրառեցինք վերը քննարկված տեղադրման եղանակը: Հավասարումների համակարգերի լուծման համար կիրառում են նաև Գաուսի մեթոդը, որը այդպես է անվանվել ի պատիվ գերմանացի նշանավոր մաթեմատիկոս Կարլ Գաուսի (1777-1855): Ստորև օրինակներով դիտարկվում է այդ մեթոդը:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$\begin{cases} 2x - 7y = -10 \\ 3y = 12 \end{cases} \qquad (1)$$

հավասարումների համակարգը:

Երկրորդ հավասարումից՝ $y = 4$: Տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ y-ի փոխարեն 4՝ գտնում ենք՝ $x = 9$: (1) համակարգն ունի (9; 4) միակ լուծումը:

ՕՐԻՆԱԿ 2: Լուծենք

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ \quad\quad 2y + z = 7 \\ \quad\quad\quad 5z = 15 \end{cases} \tag{2}$$

հավասարումների համակարգը:

Երրորդ հավասարումից գտնում ենք՝ $z = 3$: Երկրորդ հավասարման մեջ z-ի փոխարեն տեղադրելով 3՝ գտնում ենք՝ $y = 2$: Վերջապես առաջին հավասարման մեջ z-ի փոխարեն տեղադրելով 3, իսկ y-ի փոխարեն՝ 2՝ գտնում ենք՝ $x = 1$: (2) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (1; 2; 3):

ՕՐԻՆԱԿ 3: Լուծենք

$$\begin{cases} 3x - y + z + u = 11 \\ \quad 2y - z + 2u = -9 \\ \quad\quad\quad z - u = 5 \\ \quad\quad\quad\quad 2u = -4 \end{cases} \tag{3}$$

հավասարումների համակարգը:

Չորրորդ հավասարումից գտնում ենք՝ $u = -2$, երրորդից՝ $z = 3$, երկրորդից՝ $y = -1$, առաջինից՝ $x = 3$: (3) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (3; –1; 3; 2):

(1), (2) և (3) տեսքի հավասարումների համակարգերն անվանում են «եռանկյունաձև» տեսքի համակարգեր: Այդպիսի համակարգերը հեշտ է լուծել՝ սկսելով ամենավերջին հավասարումից, այնուհետև անցնելով նախավերջինին և այլն:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի մեթոդի էությունն այն է, որ սկզբում համակարգը բերվում է «եռանկյունաձև» տեսքի և այնուհետև լուծվում այնպես, ինչպես ցույց տրվեց վերևում: Ցույց տանք՝ ինչպես լուծել համակարգը Գաուսի մեթոդով:

ՕՐԻՆԱԿ 4: Լուծենք

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7 \\ \ \ 2x - 5y + 4z = -8 \\ 3x + 4y - 2z = 12 \end{cases} \left| \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 \\ \\ 1 \end{matrix}$$

հավասարումների համակարգը:

Առաջին հավասարման օգնությամբ արտաքսենք z-ը երկրորդ և երրորդ հավասարումներից: Դրա համար առաջին հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք 4-ով (գծիկից աջ նշված թիվը նշանակում է, որը հավասարումը պետք է բազմապատկել այդ թվով) և ստացված հավասարումը գումարենք երրորդ հավասարմանը: Կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7 \\ -18x + 7y = -36 & \Big| \; 2 \\ 13x - 2y = 26 & \Big| \; 7 \end{cases}$$

Այժմ երկրորդ հավասարման օգնությամբ երրորդ հավասարումից արտաքսենք y-ը: Դրա համար երկրորդ հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք 2-ով, իսկ երրորդ հավասարման ձախ և աջ մասերը՝ 7-ով և գումարենք ստացված հավասարումները: Արդյունքում ստացված հավասարումը գրենք երրորդ հավասարման փոխարեն: Կստանանք

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7 \\ -18x + 7y \quad = -36 \\ 55x \qquad\quad = 110 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը, որն ունի «եռանկյունաձև» տեսք. այդ համակարգի (2; 0; –3) լուծումը դժվար չէ գտնել:

62. Լուծեք «եռանկյունաձև» տեսքի հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} y = 3, \\ x - 4y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} -x = 7, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 2x = 6, \\ -3x + 5y = 16; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} z = 2, \\ 4y - 3z = 2, \\ 3x + 4y - 6z = 2; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} 2x = -6, \\ 3x - y = 0, \\ -x + y - z = -6; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} -x + y + z = 5, \\ 4x - 3y = 5, \\ 3x = 15. \end{cases}$

63. Հավասարումների համակարգը լուծեք Գաուսի եղանակով.

ա) $\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ x - 10y = -8; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} -2x + 3y = 0, \\ 4x - 5y = 2; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 5x + 6y = 11; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 3y - 4z = 7, \\ 3x - 4y + 5z = 2. \end{cases}$ ե) $\begin{cases} 3x + y - z = -1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ -x + 5y - 3z = -3; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} -3x + 5y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 6, \\ 4x + 2y - 5z = 1; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y - z = 1, \\ -x + y + z = -1; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + 2z = 6, \\ -x + 3y - z = 2; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} -2x + 7y - 4z = 1, \\ 4x - 8y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 1; \end{cases}$ ժ) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 3, \\ x + 3y + 2z = 3, \\ 2x + y + 3z = 2: \end{cases}$

Հավասարումների համակարգերի լուծման գրաֆիկական եղանակը

Այս պարագրաֆում կդիտարկվի հնարք, որը սովորաբար անվանում են հավասարումների համակարգերի լուծման գրաֆիկական եղանակ: Այդ հնարքը կայանում է համապատասխան ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման և դրանց հատման պարզաբանման մեջ, այսինքն համակարգն ունի՞ լուծում, և դրանք քանի՞սն են: Ընդհանրապես ասած, այդ եղանակով ոչ միշտ կարելի է ստանալ ճշգրիտ լուծումներ, սակայն առանձին դեպքերում դրանք հնարավոր է լինում գտնել:

Այդ իսկ պատճառով համոզվելու համար, որ գտնված լուծումները ճշգրիտ են, անհրաժեշտ է դրանք տեղադրել համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման մեջ և համոզվել, որ ստացվում են թվային հավասարություններ:

Այս պարագրաֆում օրինակները ընտրված են այնպես, որ համակարգերի կամ հավասարումների լուծումները համարյա ակնհայտ են նկարներից:

1.9 Երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծման գրաֆիկական եղանակը

Օրինակ 1. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից y-ը արտահայտելով x-ով՝ ստանում ենք (1)-ին համարժեք

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

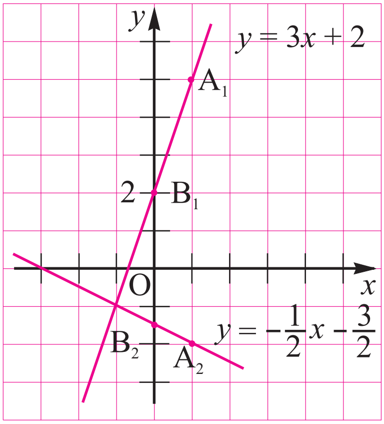
համակարգը:

Հարթության վրա ներմուծենք $x0y$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը:

$y = 3x + 2$ հավասարումը $A_1(1; 5)$ և $B_1(0; 2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումն է, իսկ

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\text{-ը՝ } A_2(1; -2)$$

և $B_2\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:



Նկ. 1

$x0y$ կոորդինատային համակարգում կառուցենք այդ ուղիղները (նկ. 1):

Ինչպես երևում է նկ. 1-ից, ուղիղները հատվում են $(-1; -1)$ կետում: Այդ կետի $x = -1$, $y = -1$ կոորդինատներն էլ հենց (2) համակարգի միակ լուծումն են և հետևաբար նրան համարժեք (1) համակարգի լուծումները: Տեղադրելով x-ի և y-ի գտնված արժեքները (1) համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման մեջ՝ համոզվում ենք, որ համակարգի լուծումը ճիշտ է գտնված:

Նշենք, որ ելնելով (2) հավասարումների տեսքից, նախօրոք կարելի էր ասել, որ դիտարկվող ուղիղները հատվում են մի կետում: Չէ՞ որ այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները տարբեր են $\left(3 \neq -\frac{1}{2}\right)$, հետևաբար ուղիղները զուգահեռ չեն:

Օրինակ 2. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

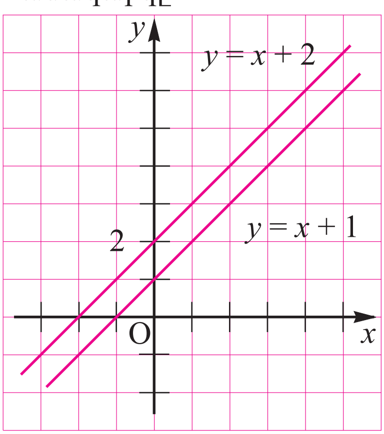
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից y-ը արտահայտելով x-ով՝ ստանում ենք (3)-ին համարժեք

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2 \end{cases} \qquad (4)$$

համակարգը:



Նկ. 2

(4) համակարգի հավասարումները զուգահեռ ուղիղների հավասարումներն են, որովհետև նրանց անկյունային գործակիցները հավասար են $(1 = 1)$:

Այդ ուղիղները չեն համընկնում, որովհետև y-ների առանցքը հատում են տարբեր կետերում՝ առաջինը $(0; 1)$ կետում, իսկ երկրորդը՝ $(0; 2)$ կետում (նկ. 2):

Այսպիսով այդ ուղիղները չեն հատվում, ուստի (4) համակարգը և հետևաբար նրան համարժեք (3) համակարգը լուծում չունի:

Օրինակ 3. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

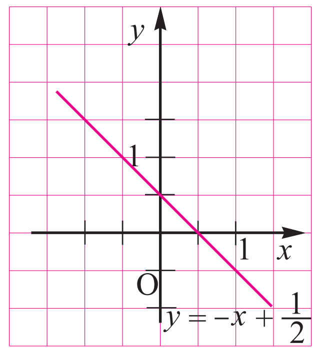
$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ -4x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից y-ը արտահայտելով x-ով՝ ստանում ենք (5)-ին համարժեք

$$\begin{cases} y = -x + 0{,}5, \\ y = -x + 0{,}5 \end{cases} \qquad (6)$$

համակարգը:



Նկ. 3

Այս համակարգի հավասարումները նույնն են, և հետևաբար դրանցով տրվում է միևնույն ուղիղը՝ $y = -x + 0{,}5$ (նկ. 3):

Դա ցույց է տալիս, որ (5) համակարգի բոլոր լուծումները $y = -x + 0{,}5$ ուղղին պատկանող բոլոր կետերի $(x; y)$ կոորդինատներն են: (5) համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ $(x; -x + 0{,}5)$, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Այսպիսով, գծային հավասարումների համակարգը գրաֆիկական եղանակով լուծելու համար անհրաժեշտ է՝

1) յուրաքանչյուր հավասարումը լուծել y-ի նկատմամբ,
2) կոորդինատային հարթության վրա կառուցել ստացված հավասարումներին համապատասխանող ուղիղները:

Եթե ուղիղները հատվում են, ապա նրանց հատման կետի կոորդինատներից բաղկացած թվազույգը կլինի համակարգի լուծումը:

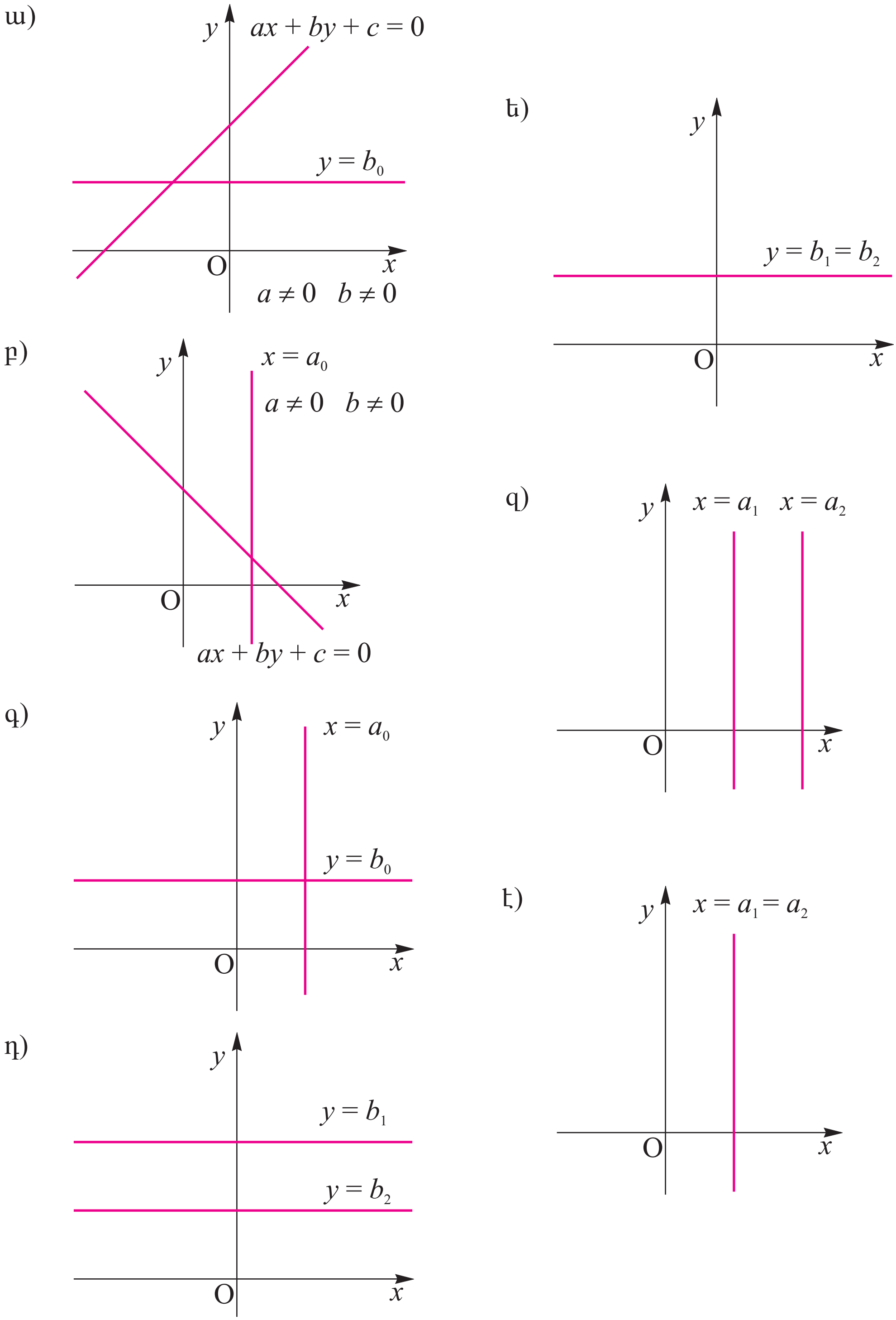
Եթե ուղիղները զուգահեռ լինեն, ապա համակարգը լուծում չունի:

Եթե ուղիղները համընկնեն, ապա համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ այդ ուղղին պատկանող բոլոր կետերի կոորդինատների թվազույգերը:

Դիտողություն 1: Եթե առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի որոշ գործակիցներ հավասար են զրոյի, ապա այն բերվում է հետևյալ տեսքի համակարգերից որևէ մեկին.

1) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = b_0 \end{cases}$ $\quad a \neq 0$ և $b \neq 0$ (նկ. 4 ա),

2) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ x = a_0 \end{cases}$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0$ (նկ. 4 բ),


ա)
y
$ax + by + c = 0$
$y = b_0$
O
x
$a \neq 0 \quad b \neq 0$
բ)
y
$x = a_0$
$a \neq 0 \quad b \neq 0$
O
x
$ax + by + c = 0$
գ)
y
$x = a_0$
$y = b_0$
O
x
դ)
y
$y = b_1$
$y = b_2$
O
x
ե)
y
$y = b_1 = b_2$
O
x
զ)
y
$x = a_1 \quad x = a_2$
O
x
է)
y
$x = a_1 = a_2$
O
x

Նկ. 4

3) $\begin{cases} x = a_0, \\ y = b_0 \end{cases}$ (նկ. 4 գ),

4) $\begin{cases} y = b_1, \\ y = b_2 \end{cases}$ (նկ. 4 դ, ե),

5) $\begin{cases} x = a_1, \\ x = a_2 \end{cases}$ (նկ. 4 զ, է)։

1, 2 և 3 դեպքերում համակարգի հավասարումներին համապատասխանող ուղիղները հատվում են մի կետում, այսինքն համակարգն ունի միակ լուծում։

4-րդ դեպքում ($b_1 \neq b_2$) և 5-րդ դեպքում ($a_1 \neq a_2$) նշված ուղիղները զուգահեռ են, և համակարգը լուծում չունի։

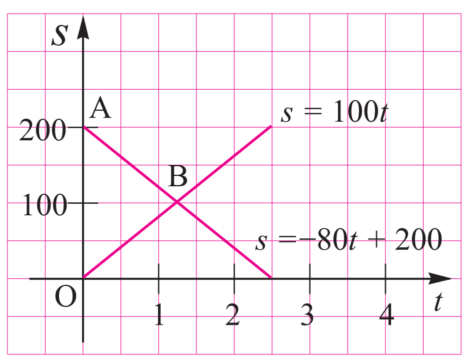
Վերջապես, 4-րդ դեպքում ($b_1 = b_2$) և 5-րդ դեպքում ($a_1 = a_2$), նշված ուղիղները համընկնում են, և համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որոնք համապատասխանում են այդ ուղիղների կետերին։

Դիտողություն 2: Նշենք, որ $x = a$ հավասարմանը կոորդինատային հարթության վրա համապատասխանում են բոլոր այն կետերը, որոնց աբսցիսը a է, իսկ օրդինատը՝ ցանկացած թիվ։ Բոլոր այդպիսի կետերը գտնվում են Ox առանցքին ուղղահայաց և A(a; 0) կետով անցնող ուղղի վրա։

Նման կերպ, $y = b$ հավասարմանը բավարարում են բոլոր այն կետերը, որոնք գտնվում են Oy առանցքին ուղղահայաց և B(0; b) կետով անցնող ուղղի վրա։ (Այս փաստերը ձեզ հայտնի են 7-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացից)։

Խնդիր: Գնացքը, $t_0 = 0$ պահին դուրս գալով O կայարանից, գնում է 100 կմ/ժ արագությամբ։ Նրան ընդառաջ նույն $t_0 = 0$ պահին A կայարանից դուրս է գալիս երկրորդ գնացքը՝ 80 կմ/ժ արագությամբ։ O-ից A հեռավորությունն է 200 կմ է։ Կառուցել այդ գնացքների շարժման գրաֆիկները և դրանց օգնությամբ որոշել՝ երբ և O կայարանից ինչ հեռավորության վրա կհանդիպեն գնացքները։

Լուծում: Ներմուծենք tOs ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը (նկ. 5)։ Կհամարենք, որ t-ի առանցքը 1 սմ-ին համապատասխանում է 1 ժամ, իսկ s-ի առանցքի 1 սմ-ին՝ 100 կմ։



Նկ. 5

s առանցքի վրա նշենք $s = 200$ օրդինատն ունեցող A կետը:

Հարմարության համար ընդունենք, որ առաջին գնացքը O կետից շարժվում է s-ի առանցքի դրական ուղղությամբ, իսկ երկրորդը՝ A կետից՝ s-ի առանցքի բացասական ուղղությամբ: Այդ դեպքում առաջին գնացքի շարժման օրենքն արտահայտվում է

$$S = 100\, t \tag{7}$$

բանաձևով, իսկ երկրորդ գնացքի շարժման օրենքն արտահայտվում է

$$S = -80t + 200 \tag{8}$$

բանաձևով:

Արագությունը t-ի գործակիցն է: Առաջին գնացքի համար այն դրական է, իսկ երկրորդի համար՝ բացասական: Բացի այդ, $t = 0$ դեպքում առաջին գնացքը s-ի առանցքի վրա ունի $s = 0$ օրդինատը, իսկ երկրորդը՝ $S = 200$ օրդինատը, ինչը և համապատասխանում է (7) և (8) հավասարումներին:

Նկ. 4-ում պատկերված են այդ ֆունկցիաների գրաֆիկներ հանդիսացող ուղիղները: Գնացքների հանդիպումը կկայանա այնպիսի t պահի, երբ այդ գրաֆիկների կետերի օրդինատները հավասար են միևնույն s թվին: Բայց այդ դեպքում այդ t և s թվերը միաժամանակ պետք է բավարարեն (7) և (8) հավասարումներին, այսինքն պետք է հանդիսանան այդ ուղիղների հատման B կետի կոորդինատները:

Նկարից երևում է, որ B կետի կոորդինատները մոտավորապես հավասար են՝ $t \approx 1{,}1$ $\quad s \approx 110$:

Համեմատելու համար լուծենք

$$\begin{cases} s = 100t, \\ s = -80t + 200 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը:

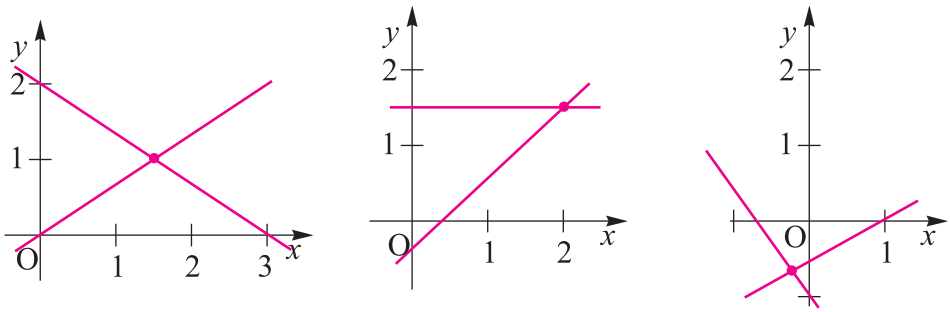
Կստանանք՝ $t = \dfrac{10}{9}$ ժամ $\approx 66{,}66 \ldots$ րոպե ≈ 67 րոպե:

$$S = 100 \cdot \frac{10}{9} \text{ կմ} \approx 111{,}11 \text{ կմ} \approx 111 \text{ կմ}:$$

Պատասխան՝ գնացքները կհանդիպեն մոտավորապես 67 րոպե հետո, O-ից մոտավորապես 111 կմ հեռավորության վրա:

64. Ինչպե՞ս լուծել գծային հավասարումների համակարգը գրաֆիկական եղանակով:

65. Աչքաչափով որոշեք նկ. 6-ում պատկերված ուղիղների հատման կետերի կոորդինատները:



ա) բ) գ)

Նկ. 6

66. Որոշեք ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները.

ա) $y = 2x - 7;$ բ) $y = -x - 2;$

գ) $y = \frac{1}{7} - 2x;$ դ) $y = -\frac{1}{3} - 0{,}2x$:

67. Որոշեք ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները.

ա) $y = x + 4$ և $y = 3x;$ բ) $y = -2$ և $y = 7x + 1;$

գ) $y = 2 - 3x$ և $y = 5x - 4$:

68. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկական եղանակով.

ա) $\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x - 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y = x - 2, \\ y = 4; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = 2 - x; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y + x = 1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ 2x + 4y + 2 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x - y = 4; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y + 5 = 0; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y - 2 = 0: \end{cases}$

69. Կոորդինատային առանցքների հետ հատվո՞ւմ է արդյոք $ax + by + c = 0$ ուղիղը, եթե a և b թվերը տարբեր են զրոյից:

70. Ի՞նչ հավասարում ունի ուղիղը, որը զուգահեռ է
ա) x-երի առանցքին,
բ) y-ների առանցքին:

71. a, b և c-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $ax + by + c = 0$ ուղիղը
ա) հատում է կոորդինատային առանցքները,
բ) զուգահեռ է x առանցքին, գ) զուգահեռ է y առանցքին:

72. Որոշեք՝ քանի՞ լուծում ունի հավասարումների համակարգը և տվեք երկրաչափական մեկնաբանություն.

ա) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ y = 5; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 4x - 0{,}3y = 5; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x + 4y = 1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 0{,}3x + 1\frac{1}{7}y = 5, \\ -0{,}15x - \frac{4}{7}y = -2\frac{1}{2}; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 3\frac{1}{3}x - 2{,}2y = 0, \\ 10x - 6{,}6y = 1: \end{cases}$

73. Հավասարումների համակարգը լուծում ունի՞: Պատասխանը լուսաբանեք գրաֆիկների օգնությամբ.

ա) $\begin{cases} x - y = 2, \\ -x + y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 5x - 4y = 1; \\ 20x - 16y = -4; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{1}{2}x + y = 2; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}13y = 2, \\ \frac{x}{6} - \frac{13y}{30} = \frac{2}{7}: \end{cases}$

74. Որոշեք k-ն, եթե $y = kx$ ուղիղն անցնում է այն կետով, որի կոորդինատները հավասարումների համակարգի լուծումն են.

ա) $\begin{cases} x + 2y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + y = 3: \end{cases}$

75. Ապացուցեք, որ հավասարումների համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ.

ա) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + 2y = 6; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 0{,}5x + 0{,}5y = 1: \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}9 = 0, \\ -3x - 2y = 9; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{2x}{3} - 6 = -\dfrac{2y}{3}: \end{cases}$

76. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x + y = -b$ և $x - ay = 2$ ուղիղները
ա) հատվում են (1; 4) կետում,
բ) զուգահեռ են,
գ) համընկնում են:

77. Կազմեք հավասարումների համակարգ, որի լուծումը տված թվազույգն է.
ա) (3; –1);
բ) (1; 3);
գ) (5; –2);
դ) (0; 3):

78. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկական եղանակով.

ա) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y + 1 = 0, \\ y = 2; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 2; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{2}{3} = 0, \\ 2x + 2y - 4 = 0: \end{cases}$

1.10 Խնդիրների լուծում առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգերի օգնությամբ

Խնդիր 1: *(հնագույն)*: Հանդիպեցին երկու հովիվ՝ Հովհաննեսը և Պետրոսը: Հովհաննեսն ասում է Պետրոսին. «Տուր ինձ մի ոչխար, և ինձ մոտ կլինի երկու անգամ ավելի ոչխար, քան քեզ մոտ»: Իսկ Պետրոսը նրան պատասխանում է. «Ո՛չ. ավելի լավ է դու ինձ տուր մի ոչխար, և մեզ մոտ կլինեն հավասար թվով ոչխարներ»: Քանի՞ ոչխար ուներ նրանցից յուրաքանչյուրը:

Լուծում: Դիցուք Հովհաննեսն ուներ x ոչխար, իսկ Պետրոսը՝ y ոչխար: Եթե Պետրոսը Հովհաննեսին տար մեկ ոչխար, ապա Պետրոսի մոտ կմնար $(y - 1)$ ոչխար, իսկ Հովհաննեսի մոտ կլիներ $(x + 1)$ ոչխար:

Բայց այդ դեպքում Հովհաննեսի մոտ երկու անգամ շատ ոչխար կլիներ, քան Պետրոսի մոտ: Հետևաբար

$$x + 1 = 2(y - 1): \qquad (1)$$

Իսկ եթե Հովհաննեսը Պետրոսին մեկ ոչխար տար, ապա Հովհաննեսի մոտ կմնար $(x - 1)$ ոչխար, իսկ Պետրոսի մոտ կդառնար $(y + 1)$ ոչխար: Բայց այդ դեպքում նրանք կունենային հավասար թվով ոչխարներ: Հետևաբար

$$x - 1 = y + 1: \qquad (2)$$

Խնդրում անհրաժեշտ է գտնել x-ի և y-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք միաժամանակ բավարարում են (1) և (2) հավասարումներին: Այլ կերպ ասած, անհրաժեշտ է լուծել երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x + 1 = 2(y - 1), \\ x - 1 = y + 1: \end{cases} \qquad (3)$$

Լուծենք այս համակարգը տեղադրման եղանակով:

Առաջին հավասարումից x-ը արտահայտենք y-ով՝

$$x = 2y - 3: \qquad (4)$$

Տեղադրելով x-ի փոխարեն $2y - 3$ (3) համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք մեկ y փոփոխականով հավասարում՝

$$(2y - 3) - 1 = y + 1,$$

որն ունի միակ լուծում՝ $y_0 = 5$: Տեղադրելով $y_0 = 5$ արժեքը (4) հավասարման մեջ, գտնում ենք՝ $x_0 = 7$: Հետևաբար (3) համակարգն ունի միակ լուծում՝

$$x_0 = 7, y_0 = 5:$$

Պատասխան՝ Հովհաննեսն ունի 7 ոչխար, իսկ Պետրոսը՝ 5 ոչխար:

Խնդիր 2: A վայրից B վայր մեկնեց հեծանվորդը, իսկ քառորդ ժամ հետո նրա հետևից շարժվեց ավտոմեքենան: A-ից B ճանապարհի մեջտեղում ավտոմեքենան հասավ հեծանվորդին: Երբ մեքենան հասավ B վայր, հեծանվորդին դեռ մնում էր անցնելու ճանապարհի $\frac{1}{3}$ մասը: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեցին հեծանվորդը և ավտոմեքենան A-ից B ճանապարհի վրա, եթե հայտնի է, որ նրանց արագությունները հաստատուն են:

Լուծում: Դիցուք հեծանվորդը A-ից B ճանապարհն անցել է x րոպեում, իսկ ավտոմեքենան՝ y րոպեում: A-ից B ճանապարհի կեսի վրա հեծանվորդը ծախսել է $\frac{1}{2}x$ րոպե, իսկ ավտոմեքենան՝ $\frac{1}{2}y$ րոպե: Ըստ պայմանի՝ նրանք հանդիպել են ճանապարհի մեջտեղում, չնայած որ ավտոմեքենան 15 րոպե ուշ էր դուրս եկել:

Նշանակում է՝

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 15: \qquad (5)$$

Ավտոմեքենան B վայրը հասնելու պահին հեծանվորդը ($y + 15$) րոպե գտնվում էր ճանապարհին և անցել էր ճանապարհի $\frac{2}{3}$ մասը, այսինքն ծախսել էր $\frac{2}{3}x$ րոպե, հետևաբար

$$y + 15 = \frac{2}{3}x: \qquad (6)$$

Խնդրում անհրաժեշտ է գտնել x-ի և y-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք միաժամանակ բավարարում են (5) և (6) հավասարումներին: Այլ կերպ ասած, պետք է լուծել երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 15 = \frac{1}{2}x, \\ y + 15 = \frac{2}{3}x: \end{cases} \qquad (7)$$

(7) համակարգի առաջին հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկելով 2-ով, իսկ երկրորդ հավասարման ձախ և աջ մասերը՝ 3-ով՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} y + 30 = x, \\ 3y + 45 = 2x \end{cases} \qquad (8)$$

համակարգը:

Լուծելով այդ համակարգը, կստանանք նրա միակ լուծումը՝ $x_0 = 45$, $y_0 = 15$:

Պատասխան՝ A-ից B ճանապարհի վրա հեծանվորդը ծախսել է 45 րոպե, իսկ ավտոմեքենան՝ 15 րոպե:

Խնդիր 3.* Դասագիրք, գրիչ և օրագիր գնելու համար աշակերտը ծախսեց 140 ռուբլի[1]: Եթե դասագիրքը 5 անգամ էժան լիներ, գրիչը՝ 2 անգամ, օրագիրը՝ 2,5 անգամ, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 40 ռուբլի: Իսկ եթե սկզբնական արժեքի հետ համեմատած՝ դասագիրքը 3 անգամ էժան լիներ, գրիչը՝ 4 անգամ, իսկ օրագիրը՝ 2 անգամ, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 50 ռուբլի: Որքա՞ն արժեն դասագիրքը, գրիչը և օրագիրը:

Լուծում: Դիցուք դասագիրքն արժե x ռուբլի, գրիչը՝ y ռուբլի, իսկ օրագիրը՝ z ռուբլի:

---

[1] ռ. - ռուբլի, կոպ. - կոպեկ (1ռ. = 100 կոպ.). դրամական միավորներ են:

Առաջին հավասարումը կազմենք այն պայմանից, որ դրանց գնման համար ծախսվել է 140 ռուբլի՝

$$x + y + z = 140:$$

Երկրորդ հավասարումը կազմենք այն պայմանից, որ եթե դասագիրքն արժենար $\frac{1}{5}x$ ռուբլի, գրիչը՝ $\frac{1}{2}y$ ռուբլի, օրագիրը՝ $\frac{1}{2,5}z$ ռուբլի, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 40 ռուբլի՝

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2,5}z = 40:$$

Վերջապես, երրորդ հավասարումը կազմենք այն պայմանից, որ եթե դասագիրքն արժենար $\frac{1}{3}x$ ռուբլի, գրիչը՝ $\frac{1}{4}y$ ռուբլի, օրագիրը՝ $\frac{1}{2}z$ ռուբլի, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 50 ռուբլի՝

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 50:$$

Խնդրում պահանջվում է գտնել x, y և z-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք միաժամանակ բավարարում են այդ երեք հավասարումներին: Այլ խոսքերով, անհրաժեշտ է լուծել երեք անհայտով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x + y + z = 140, \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2,5}z = 40, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 50: \end{cases} \tag{9}$$

Երկրորդ հավասարման երկու մասը բազմապատկելով 10-ով, իսկ երրորդ հավասարման երկու մասը՝ 12-ով՝ կստանանք

$$\begin{cases} x + y + z = 140, \\ 2x + 5y + 4z = 400, \\ 4x + 3y + 6z = 600 \end{cases} \tag{10}$$

համակարգը:

(10) համակարգի առաջին հավասարումից z-ը արտահայտենք x և y-ով՝

$$z = 140 - z - y \tag{11}$$

և տեղադրենք $140 - x - y$ արտահայտությունը (10) համակարգի երկրորդ և երրորդ հավասարումներում z-ի փոխարեն: Կստանանք երկու անհայտով երկու հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4(140 - x - y) = 400, \\ 4x + 3y + 6(140 - x - y) = 600: \end{cases} \tag{12}$$

Լուծելով (12) համակարգը՝ ստանում ենք նրա միակ լուծումը՝

$x_0 = 90,\ y_0 = 20$:

Տեղադրելով $x_0 = 90,\ y_0 = 20$ թվերը (11) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$z_0 = 30$:

Հետևաբար (9) համակարգն ունի միակ լուծում՝

$x_0 = 90,\ y_0 = 20,\ z_0 = 30$:

Պատասխան՝ դասագիրքն արժեր 90 ռուբլի, գրիչը՝ 20 ռուբլի, օրագիրը՝ 30 ռուբլի:

79. ա) Երկու թվերի գումարը 10 է, իսկ տարբերությունը՝ 4: Գտեք այդ թվերը:
բ) Երկու թվերի գումարը 21 է, իսկ տարբերությունը՝ 9: Գտեք այդ թվերը:

80. ա) Մի թիվը 6-ով մեծ է մյուսից: Այդ թվերի գումարը հավասար է 40-ի: Գտեք այդ թվերը:
բ) Մի թիվը 15-ով փոքր է մյուսից: Գտեք այդ թվերը, եթե նրանց գումարը 23 է:

81. ա) Մի թիվը 2 անգամ մեծ է մյուսից: Եթե այդ թվերից փոքրը մեծացվի 4 անգամ, իսկ մեծը՝ 2 անգամ, ապա նրանց գումարը հավասար կլինի 44: Գտեք այդ թվերը:
բ) Մի թիվը 3 անգամ փոքր է մյուսից: Եթե այդ թվերից մեկը մեծացվի 2 անգամ, ապա նրանց գումարը հավասար կլինի 42: Գտեք այդ թվերը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը: Ինչպես պետք է փոխել խնդրի ձևակերպումը, որպեսզի լուծումը լինի միակը:

82. ա) Մի թիվը 7-ով մեծ է մյուսից: Եթե փոքր թիվը մեծացվի 2 անգամ, իսկ մեծը՝ 6 անգամ, ապա նրանց գումարը կդառնա 31: Գտեք այդ թվերը:
բ) Մի թիվը 10-ով փոքր է մյուսից: Եթե մեծ թիվը փոքրացվի 3 անգամ, ապա նրանց գումարը կդառնա 70: Գտեք այդ թվերը:

83. ա) Տված են երկու թվեր: Եթե առաջին թիվը բազմապատկենք 2-ով, ապա ստացված թիվը 1-ով մեծ կլինի երկրորդից, իսկ եթե երկրորդ թիվը բազմապատկենք 2-ով, ապա ստացված թիվը 7-ով մեծ կլինի առաջինից: Գտեք այդ թվերը:

բ) Տված են երկու թվեր: Եթե առաջին թիվը բազմապատկենք 4-ով, ապա կստացվի երկրորդից 6-ով մեծ թիվ, իսկ եթե երկրորդը բազմապատկենք 3-ով, ապա կստացվի առաջինից 1,5-ով փոքր թիվ: Գտեք այդ թվերը:

84. ա) Մի բնակավայրից մյուսը կարելի է գնալ գյուղամիջյան ճանապարհով կամ մայրուղով: Գյուղամիջյան ճանապարհը 5 կմ-ով կարճ է մայրուղուց, իսկ նրանց ընդհանուր երկարությունը 61 կմ է: Որքա՞ն է գյուղամիջյան ճանապարհի երկարությունը:
բ) Գյուղից քաղաք տանում են երկու ճանապարհներ՝ հողածածկ և ասֆալտապատ: Հողածածկ ճանապարհը 18 կմ-ով երկար է ասֆալտապատ ճանապարհից, իսկ նրանց ընդհանուր երկարությունը 66 կմ է: Որքա՞ն է հողածածկ ճանապարհի երկարությունը:

85. Մի հերթափոխում նոր խառատային հաստոցով 30 դետալ ավելի է մշակվում, քան հին հաստոցով: Ընդ որում մի հերթափոխում հինգ նոր հաստոցներով կարելի է մշակել այնքան դետալ, որքան ութ հին հաստոցներով: Որքա՞ն դետալ է մշակվում նոր հաստոցով:

86. Եթե մի վայրից միաժամանակ և նույն ուղղությամբ մեկնեն մոտոցիկլավարը և հեծանվորդը, ապա 1 ժամ հետո մոտոցիկլավարը հեծանվորդից 33 կմ առաջ կանցնի: Իսկ եթե այդ վայրից նրանք միաժամանակ դուրս գան հակառակ ուղղություններով, ապա 1 ժամ հետո նրանց միջև կլինի 57 կմ հեռավորություն: Կարելի՞ է արդյոք իմանալ մոտոցիկլավարի և հեծանվորդի արագությունները: Եթե կարելի է, ապա իմացեք:

87. Դպրոցականները էքսկուրսիա գնացին: Նրանք վերադարձան այլ ճանապարհով, որ 7 կմ-ով կարճ էր առաջինից: Որքա՞ն է յուրաքանչյուր ճանապարհի երկարությունը, եթե դպրոցականներն ընդամենը անցան 41 կմ:

88. 52 սմ պարագծով ուղղանկյան երկու կողմերի տարբերությունը 4 սմ է: Գտեք ուղղանկյան կողմերը:

89. 30 աշակերտից բաղկացած դասարանի համար գնեցին թատրոնի տոմսեր՝ 100 և 150 ռուբլի արժեքով: Առանձին-առանձին տարբեր արժեքի քանի՞ տոմս են գնել, եթե դրանց ընդհանուր արժեքը կազմել է 3500 ռուբլի:

90. Դպրոցը ձեռք բերեց 4 բազկաթոռ և 2 սեղան, դրանց համար վճարելով 36000 ռուբլի: Եթե գնվեր 2 բազկաթոռ և 3 սեղան, ամբողջ գնումը 14000 ռուբլով պակաս կլիներ: Առանձին-առանձին որքա՞ն արժեն բազկաթոռը և սեղանը:

91. Գնումներ կատարելուց հետո տղան ստացավ 70 ռուբլի մանրոն 5 ռուբլի և 10 ռուբլի թղթադրամներով: Ընդամենը նա ստացավ 10 թղթադրամ: Քանի՞ 5 ռուբլիանոց թղթադրամ նա ստացավ:

92. Երկնիշ թիվը 5 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից: Եթե այդ թիվը մեծացվի 9-ով, ապա կստացվի թիվ, որը 6 անգամ մեծ է սկզբնական երկնիշ թվի թվանշանների գումարից: Գտեք երկնիշ թիվը:

93. Երկու բնական թվերի գումարը 31 է, իսկ տարբերությունը՝ 5: Գտեք այդ թվերը:

94. Միևնույն գործվածքեղենի երկու փաթեթներ միասին արժեն 9100 ռուբլի: Երբ առաջին փաթեթից վաճառեցին այնքան, որքան սկզբում երկրորդ փաթեթում էր, իսկ երկրորդից՝ առաջին փաթեթում սկզբում եղածի կեսի չափ, ապա առաջին փաթեթում 10 մ-ով ավելի մնաց, քան երկրորդում: Քանի՞ մետր գործվածք կար փաթեթներից յուրաքանչյուրում, եթե գործվածքի 1 մ-ը արժե 140 ռուբլի:

95. Դպրոցականների երկու բրիգադ արտադրական պրակտիկայի ընթացքում միասին վաստակեց 11700 ռուբլի: Առաջին բրիգադը աշխատել էր 15 օր, երկրորդը՝ 14 օր: Որքա՞ն էր վաստակում բրիգադներից յուրաքանչյուրը մեկ օրում, եթե առաջինը 4 օրում վաստակել է 1100 ռուբլով ավելի, քան երկրորդը 3 օրում:

96. Դպրոցական բուֆետ բերեցին 300 հրուշակ և բուլկի, 20 կգ ընդհանուր զանգվածով: Բոլոր հրուշակների զանգվածը այնքան է, որքան բոլոր բուլկիների զանգվածը: Որոշեք, քանի՞ հրուշակ և քանի՞ բուլկի են բերել, եթե մեկ հրուշակի զանգվածը 100 գ է, իսկ մեկ բուլկու զանգվածը՝ 50 գ:

97. Մի թվի 5%-ը և մյուս թվի 4%-ը միասին կազմում են 46, իսկ առաջին թվի 4%-ը և երկրորդ թվի 5%-ը միասին կազմում են 44: Գտեք այդ թվերը:

98. Մի թվի 20%-ը և մյուս թվի 50% միասին կազմում են 27, իսկ առաջին թվի 50%-ը և երկրորդ թվի 50%-ը միասին կազմում են 42,3: Գտեք այդ թվերը:

99. Եռանկյան մեծ կողմը 16 սմ է, իսկ մյուս երկու կողմերի տարբերությունը՝ 0,4 դմ: Ինչի՞ են հավասար եռանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 0,38 մ է:

100. Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 0,9 մ է, մեծ կողմը 10 սմ-ով փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից, իսկ փոքր կողմի եռապատիկը 2 սմ-ով մեծ է մյուս երկու կողմերի գումարից:

101. Եռանկյան պարագիծը 16 դմ է: Մեծ կողմը 25 սմ-ով մեծ է փոքր կողմից, իսկ երկարությամբ միջին կողմի կրկնապատիկը 1 սմ-ով փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից: Գտեք եռանկյան կողմերը:

102. Երկնիշ թվի թվանշանների գումարը 6 է: Եթե այդ թվի թվանշանները տեղափոխենք, ապա կստացվի մի թիվ, որը կազմում է սկզբնական թվի $\frac{4}{7}$ մասը: Գտեք երկնիշ թիվը:

103. Երեք տարաներում միասին կար 54 լ ջուր: Եթե առաջինից երկրորդի մեջ լցնենք 4 լ, ապա երկու տարաներում ջրի քանակությունը հավասար կլինի, իսկ եթե երրորդ տարայից երկրորդի մեջ լցնենք 17 լ, ապա երկրորդում չորս անգամ ավելի ջուր կլինի, քան երրորդում: Որքան ջուր կար յուրաքանչյուր տարայում:

104. Երեք տարաներում միասին կար 36 լ ջուր: Առաջին տարայից նրանում եղած ջրի կեսը լցրին երկրորդ տարայի մեջ, այնուհետև երկրորդում ստացված ջրի $\frac{1}{3}$ մասը լցրին երրորդի մեջ, և վերջապես, երրորդում ստացված ջրի $\frac{1}{4}$ մասը լցրին առաջինի մեջ: Արդյունքում բոլոր երեք տարաներում ջրի քանակությունը նույնը եղավ: Սկզբում որքա՞ն ջուր կար յուրաքանչյուր տարայում:

105. ***Բհասկարայի խնդիրը*** (Հնդկաստան, XIIդ.): Մեկն ասաց ընկերոջը. «Տուր ինձ 100 ռուփի (դրամական միավոր է), և ես երկու անգամ քեզնից հարուստ կլինեմ»: Ընկերը պատասխանեց. «Տուր ինձ միայն 10 ռուփի, և ես 6 անգամ քեզնից հարուստ կդառնամ»: Որքա՞ն կար յուրաքանչյուրի մոտ:

106. Երեք բադ և չորս սագ միասին կշռում են 2 կգ 500 գ, իսկ չորս բադ և երեք սագ միասին կշռում են 2 կգ 400 գ: Որքա՞ն է կշռում 1 սագը:

107. ա) Ալյոշան և Բորիսը միասին կշռում են 82 կգ, Ալյոշան և Իգորը՝ 83 կգ, Բորիսը և Իգորը՝ 85 կգ: Երեքով միասին քանի՞ կգ են կշռում:
բ) Հնագույն խնդիր: Չորս առևտրական ունեն որոշակի գումար: Հայտնի է, որ առանց առաջինի, նրանց մոտ եղած գումարը 90 ռուբլի է, առանց երկրորդի՝ 85 ռուբլի, առանց երրորդի՝ 80 ռուբլի, առանց չորրորդի՝ 75 ռուբլի: Քանի՞ ռուբլի ուներ նրանցից յուրաքանչյուրը:
գ) Հնագույն խնդիր: Հայրն ունի յոթ որդի: Առաջին և չորրորդ որդիների տարիքների գումարը 9 է, առաջինի և վեցերորդի՝ 8, երկրորդի և հինգերորդի՝ 8, երկրորդի և երրորդի՝ 9, երրորդի և վեցերորդի՝ 6, չորրորդի և յոթերորդի՝ 4, իսկ յոթերորդի և հինգերորդի՝ նույնպես 4: Քանի՞ տարեկան է նրանցից յուրաքանչյուրը:

108. Երեք տղաների բաժանեցին 145 ընկույզ: Առաջին տղայի ստացած ընկույզների քանակի կեսը հավասար է երկրորդ տղայի ստացած ընկույզների քանակի $\frac{2}{3}$-ին և երրորդի ստացած ընկույզների քանակի $\frac{3}{4}$-ին: Որքա՞ն ընկույզ է ստացել տղաներից յուրաքանչյուրը:

109. ա) Եթե ճանապարհի $\frac{1}{3}$-ը զբոսաշրջիկն անցնի ոտքով, իսկ $\frac{2}{3}$-ը հեծանվով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա կծախսի 1,5 ժամ: Իսկ եթե ճանապարհի $\frac{1}{3}$-ը անցնի հեծանվով, իսկ $\frac{2}{3}$-ը՝ ոտքով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա կծախսի 2 ժամ 15 րոպե: Որքա՞ն ժամանակում ամբողջ ճանապարհը նա կանցնի ոտքով:
բ) Եթե ավազանի $\frac{1}{4}$-ը լցնի առաջին խողովակը, իսկ այնուհետև $\frac{3}{4}$ մասը՝ երկրորդը, ապա ավազանը կլցվի 5 ժ-ում: Իսկ եթե ավազանի $\frac{3}{4}$ մասը լցնի առաջին խողովակը, իսկ այնուհետև $\frac{1}{4}$ մասը՝ երկրորդը, ապա ավազանը կլցվի 7 ժամում: Միայն երկրորդ խողովակը քանի՞ ժամում կլցնի ավազանը:

գ) Եթե ճանապարհի $\frac{2}{5}$ մասը զբոսաշրջիկն անցնի գնացքով, իսկ $\frac{3}{5}$ մասը` ավտոբուսով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա նա կծախսի 4 ժամ: Իսկ եթե ճանապարհի $\frac{2}{5}$ մասը նա անցնի ավտոբուսով, իսկ $\frac{3}{5}$ մասը` գնացքով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա կծախսի 4 ժ. 20 րոպե: Որքա՞ն ժամանակում նա ամբողջ ճանապարհը կանցնի գնացքով:

110. Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարի վրա, ապա քանորդում կստացվի 6, իսկ մնացորդում` 3: Իսկ եթե այդ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարից 2-ով մեծ թվի վրա, ապա և՛ քանորդում և՛ մնացորդում կստացվի 5: Գտեք այդ երկնիշ թիվը:

111. Տղան ուներ 75 ռուբլի` 5 և 10 արժողությամբ թղթադրամներով: Եթե 5 ռուբլիանոց թղթադրամները լինեին այնքան, որքան հինգ ռուբլիանոցները, ապա, նրա մոտ կդառնար 90 ռուբլի: Քանի՞ հինգռուբլիանոց և քանի՞ տասռուբլիանոց թղթադրամներ ուներ տղան:

112. Ավազանը լրիվ լցվում է տաք և սառը ջրով երկու խողովակներով 1ժ 20 րոպեում: Եթե առաջին խողովակը բացվի 10 րոպե, իսկ երկրորդը` 12 րոպե, ապա կլցվի ավազանի $\frac{2}{15}$ մասը: Որքա՞ն ժամանակում կլցվի ավազանը սառը ջրի խողովակով:

113. Կազմեք խնդիր, որը լուծվում է հետևյալ համակարգի օգնությամբ`

ա) $\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + 5y = 28 \\ 2x + 4y = 22: \end{cases}$

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

$$\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} =$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C \cdot A}{C \cdot B}$$

2.1 Ամբողջ ցուցիչով աստիճանի գաղափարը

Մենք արդեն գիտենք, որ a իրական թվի n ($n > 1$) բնական ցուցիչով աստիճան անվանում են a^n թիվը, որը սահմանվում է այսպես՝

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ անգամ}}$$

Եթե $n = 1$, ապա համարվում է, որ այդ հավասարության աջ մասը հավասար է a-ի՝

$$a^1 = a$$

Նշվել է նաև, որ բնական ցուցիչով աստիճանը օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1.° Ցանկացած a և b իրական թվերի և ցանկացած n բնական թվի համար՝

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

2.° Ցանկացած a իրական թվի և ցանկացած m և n բնական թվերի համար՝

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

3.° Ցանկացած a իրական թվի և ցանկացած m և n բնական թվերի համար՝

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Այժմ պարզենք, թե ինչպես պետք է բաժանել միևնույն a թվի բնական ցուցիչներով աստիճանները: Ընդ որում պարտավոր ենք համարել, որ $a \neq 0$, քանի որ զրոյի վրա բաժանել չի կարելի:

Եվ այսպես, դիցուք a-ն զրոյից տարբեր իրական թիվ է, իսկ m-ը և n-ը՝ բնական թվեր: Դիտարկենք a^m-ի և a^n-ի քանորդը՝

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n}$$

Այս կոտորակի համար կիրառենք կոտորակների հիմնական հատկությունը (որ համարիչը և հայտարարը կարելի է բազմապատկել զրոյից տարբեր միևնույն թվով, կամ բաժանել զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա):

Քննարկենք երեք դեպք՝ 1) $m > n$; 2) $m < n$; 3) $m = n$:

1) Եթե $m > n$, ապա

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n} \tag{1}$$

Մենք գալիս ենք այսպիսի եզրակացության. եթե $a \neq 0$, m և n-ը բնական թվեր են, ընդ որում $m > n$, ապա

$$a^m : a^n = a^{m-n}:$$

2) Դիցուք $m < n$: Քննարկենք օրինակ. դիցուք $m = 3$, $n = 5$: Այդ դեպքում

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1 \cdot a^3}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^2}$$

Մենք տեսնում ենք, որ $m < n$ դեպքում նախորդ կանոնը հնարավոր չէ կիրառել: Սակայն եթե պայմանավորվենք $\frac{1}{a^2}$ կոտորակը նշանակել a^{-2}-ով, այսինքն համարենք, որ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ապա կստանանք

$$a^3 : a^5 = a^{-2} = a^{3-5}$$

հավասարությունը, որը կարելի է համարել (1) հավասարության մասնավոր դեպք, առանց $m > n$ պայմանի:

Ահա ևս մեկ օրինակ.

$$a^7 : a^{10} = \frac{a^7}{a^{10}} = \frac{1}{a^3}$$

Եթե $\frac{1}{a^3}$ կոտորակը նշանակենք a^{-3}-ով, ապա կստանանք

$$a^7 : a^{10} = a^{-3} = a^{7-10}$$

հավասարությունը, որը նույնպես կարելի է համարել (1) հավասարության մասնավոր դեպք, առանց $m > n$ սահմանափակման:

Ընդհանուր դեպքում, եթե $m < n$ և $a \neq 0$, ապա

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

Այստեղ $\frac{1}{a^{n-m}}$ կոտորակը նշանակված է $a^{-(n-m)}$-ով:

3) Դիտարկենք այժմ $m = n$ դեպքը: Այդ դեպքում

$$a^m : a^n = a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ նպատակահարմար է $a^0 (a \neq 0)$-ն համարել հավասար մեկի, և այդ դեպքում կստացվի

$$a^m : a^m = 1 = a^0 = a^{m-m},$$

որը նույնպես կարելի է համարել (1) հավասարության մասնավոր դեպք, սակայն առանց $m > n$ սահմանափակման:

Վերը բերված դատողությունները ցույց են տալիս, որ նպատակահարմար է մտցնել հետևյալ երկու ***պայմանավորվածությունները***.

1. Ցանկացած զրոյից տարբեր a իրական թվի և ցանկացած m բնական թվի համար $\frac{1}{a^m}$ թիվը պայմանավորվենք նշանակել a^{-m}-ով և գրել՝

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \ (a \neq 0) :$$

Այս հավասարությունը կարդում են այսպես. «a-ի $-m$ աստիճանը հավասար է մեկը բաժանած a-ի m աստիճանի վրա»:

2. Ցանկացած զրոյից տարբեր a իրական թվի համար պայմանավորվենք a^0 արտահայտությունը համարել 1 թիվը և գրել՝

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0):$$

Այս հավասարությունը կարդում են այսպես. «a-ի զրո աստիճանը հավասար է մեկի»:

Այսպիսով, սահմանվեց, թե ինչ է a^m-ը, որտեղ $a \neq 0$ և m-ը ցանկացած ***ամբողջ թիվ է*** (դրական, բացասական կամ զրո):

Եթե a***-ն զրոյից տարբեր ցանկացած իրական թիվ է, ապա***

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \ldots a}_{m \text{ հատ}}, & \text{եթե } m\text{-ը բնական թիվ է և } m \geqslant 2, \\ a, & \text{եթե } m = 1, \\ 1, & \text{եթե } m = 0 \\ \frac{1}{a^{-m}}, & \text{եթե } m\text{-ը բացասական ամբողջ թիվ է:} \end{cases}$$

Ընդ որում a^m թիվը անվանում են ***ամբողջ ցուցիչով աստիճան,*** a-ն՝ ***հիմք,*** m թիվը՝ ***աստիճանացույց:***

Դիտողություն: 0^0 արտահայտությունը համարվում է իմաստ չունեցող արտահայտություն: Եթե m-ը բնական թիվ է, ապա 0^{-m} արտահայտությունը նույնպես համարում են իմաստ չունեցող, սակայն

$$0^m = 0:$$

114. ա) Ի՞նչ է հասկացվում գրելով a^0, եթե $a \neq 0$:
բ) Ի՞նչ է հասկացվում գրելով a^{-m}, եթե $a \neq 0$, և m-ը բնական թիվ է:
գ) Ի՞նչն են անվանում բնական ցուցիչով աստիճան:
դ) Իմաստ ունե՞ն արդյոք 0^5, 0^0, 0^{-5} արտահայտությունները:

Հաշվեք՝ (115-116).

115. ա) 5^0; բ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; գ) $(-1{,}2)^0$; դ) $(-1)^0$:

116. ա) $\frac{2^4}{2^3}$; բ) $\frac{2^4}{2^4}$; գ) $\frac{2^4}{2^5}$; դ) $\frac{2^5}{2^7}$;
ե) $\frac{3^5}{3^4}$; զ) $\frac{3^{100}}{3^{100}}$; է) $\frac{(-0{,}3)^4}{(-0{,}3)^5}$; ը) $\frac{0{,}2^7}{0{,}2^5}$:

117. Պարզեք՝ իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը: Եթե այո, ապա հաշվեք նրա արժեքը՝
ա) $\left(0{,}25 \cdot 79 - 3{,}21 \cdot 2\frac{1}{11}\right)^0$; բ) $(0{,}48 \cdot 5{,}2 - 4{,}8 \cdot 0{,}52)^0$:

118. Գրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով՝
ա) $2 \cdot 2 \cdot 2$; բ) $2^3 \cdot 2^5$; գ) $\frac{1}{3^2}$; դ) 4;
ե) $\frac{1}{3}$; զ) $\frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$; է) 5;
ը) $\frac{1}{16}$; թ) $\frac{1}{25}$; ժ) $2^3 : 2^3$;
ի) $\frac{9^7}{9^5}$; լ) $\frac{0{,}5^6}{0{,}5^7}$; խ) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 : \left(-\frac{1}{5}\right)^7$:

Հաշվեք՝ (119-121)

119. ա) $10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$;
բ) $2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$;
գ) $(-3)^3, (-3)^2, (-3)^1, (-3)^0, (-3)^{-1}, (-3)^{-2}, (-3)^{-3}$:

120. ա) $1^{-1}, -1^1, (-1)^1, (-1)^{-1}, -1^{-1}$;
բ) $1^{-2}, -1^2, (-1)^2, (-1)^{-2}, -1^{-2}$;
գ) $2^{-2}, -2^2, (-2)^2, (-2)^{-2}, -2^{-2}$:

121. ա) 4^{-2}; բ) 3^{-1}; գ) 3^{-4};
դ) $7{,}12^{0}$; ե) $5^{-1}+4^{-1}$; զ) $(5+4)^{-1}$;
է) $4^{-1}-5^{-1}$; ը) $(3^{-1}-5^{-1})^{-2}$; թ) $2^{-3}+4^{-2}$;
ժ) $3^{-2}-9^{-1}$; ի) $4^{2}\cdot 2^{-3}$; լ) $3^{-4}:9^{-2}$:

122. Ստուգեք հավասարությունը.
ա) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$; բ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^{3}$; գ) $\left(\frac{12}{31}\right)^{-5}=\left(\frac{31}{12}\right)^{5}$:

123. Ապացուցեք, որ $a\neq 0$, $b\neq 0$ իրական թվերի և k ամբողջ թվի համար ճիշտ է
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k}=\left(\frac{b}{a}\right)^{k}:$$
հավասարությունը:

Համեմատեք՝ (124-125)

124. ա) 5^{0} և $(-5)^{0}$; բ) 5^{-2} և 5^{2}; գ) $(-2)^{3}$ և $(-2)^{0}$;
դ) -3^{2} և $(-3)^{2}$; ե) $(-2)^{4}$ և 2^{-4}; զ) -2^{4} և 2^{-4}:

125. ա) 19^{-20} և $\left(\frac{1}{19}\right)^{20}$; բ) 1999^{2000} և $\left(\frac{1}{1999}\right)^{-2000}$:

126. Համեմատեք զրոյի հետ.
ա) 2^{-3}; բ) $(-2)^{3}$; գ) $(-2)^{-3}$; դ) -2^{3};
ե) 2^{-4}; զ) $(-2)^{4}$; է) $(-2)^{-4}$; ը) -2^{4}:

Գրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով, եթե $a\neq 0$ (583-584):

127. ա) $a^{3}\cdot a^{4}$; բ) $a^{4}\cdot a$; գ) $a^{13}:a^{6}$; դ) $a^{12}:a$;
ե) $(a^{4})^{6}$; զ) $(a^{2})^{5}$; է) $a^{7}\cdot b^{7}$; ը) $a^{4}\cdot b^{4}$:

128. ա) $a^{5}:a^{6}$; բ) $a^{7}:a^{6}$; գ) $a^{4}:a$; դ) $a^{12}:a^{12}$;
ե) $a^{-4}:a^{6}$; զ) $a^{4}:a^{-5}$; է) $a^{-11}:a^{-8}$; ը) $a^{-4}:a$;
թ) $a^{6}:a^{5}$; ժ) $a^{9}:a^{0}$; ի) $a^{-3}:a^{0}$; լ) $a^{0}:a^{-8}$:

2.2 Ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հատկությունները

Դիցուք a-ն և b-ն զրոյից տարբեր ցանկացած իրական թվեր են, իսկ m-ը և n-ը՝ ցանկացած ամբողջ թվեր: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (3)$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}: \qquad (5)$$

(1) հավասարությունը նշանակում է, որ ***միևնույն թվի աստիճանները բազմապատկելիս ցուցիչները գումարվում են:***

(2) հավասարությունը նշանակում է, որ ***միևնույն թվի աստիճանները բաժանելիս ցուցիչները հանվում են,*** ավելի ստույգ՝ համարիչի ցուցիչից հանում են հայտարարի ցուցիչը:

Այս պնդումների ճշմարիտ լինելը կարելի է ստուգել օրինակներով ⌈(Սակայն , իհարկե, դա խիստ ապացույց չի կարելի համարել. ճշգրիտ ապացույցները մենք կբերենք հետագայում):⌋[1]

Երկու այդպիսի օրինակներ, երբ $m = 3$, $n = 5$ և $m = 7$, $n = 10$ արդեն դիտարկվեցին նախորդ կետում:

Ահա ևս մի քանի օրինակներ ($a \neq 0$)

1) $a^{-3} \cdot a^2 = \dfrac{1}{a^3} \cdot a^2 = \dfrac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3+2}$;

2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = \dfrac{1}{a^6} \cdot \dfrac{1}{a^7} = \dfrac{1}{a^{13}} = a^{-13} = a^{-6+(-7)}$;

3) $\dfrac{a^{-3}}{a^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \dfrac{a^2}{a^3} = \dfrac{1}{a} = a{-}1 = a^{-3-(-2)}$;

4) $\dfrac{a^5}{a^{-2}} = \dfrac{a^5}{\frac{1}{a^2}} = \dfrac{a^5 \cdot a^2}{1} = a^7 = a^{5-(-2)}$;

---

[1] Խմբագրի կողմից ավելացված տեքստային հատվածները և խնդիրները սկսվում են ⌈ և ավարտվում ⌋ նշաններով:

5) $\dfrac{a^0}{a^5} = \dfrac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0-5}$:

(3) հավասարությունը նշանակում է, որ ***աստիճանը աստիճան բարձրացնելիս ցուցիչները բազմապատկվում են:***

Դրանում համոզվենք հետևյալ օրինակներով ($a \neq 0$)՝

6) $(a^{-3})^2 = \left(\dfrac{1}{a^3}\right)^2 = \dfrac{1}{a^3} \cdot \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{a^3 \cdot a^3} = \dfrac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{-3 \cdot 2}$;

7) $(a^{-4})^0 = 1 = a^0 = a^{-4 \cdot 0}$;

8) $(a^{-2})^{-3} = \left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^6}} = a^6 = a^{-2 \cdot (-3)}$:

(4) հավասարությունը նշանակում է, որ ***երկու թվերի արտադրյալի աստիճանը հավասար է այդ թվերի նույն աստիճանների արտադրյալին:***

(5) հավասարությունը նշանակում է, որ ***երկու թվերի քանորդի աստիճանը հավասար է այդ թվերի նույն աստիճանների քանորդին:***

Այս պնդումների հավաստիությանը կարելի է համոզվել հետևյալ օրինակներով ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

9) $(a \cdot b)^{-3} = \dfrac{1}{(a \cdot b)^3} = \dfrac{1}{a^3 \cdot b^3} = \dfrac{1}{a^3} \cdot \dfrac{1}{b^3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$;

10) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 = 1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{a^0}{b^0}$;

11) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \dfrac{a^3}{b^3}$:

1-11 օրինակներում կատարվեցին բոլոր մանրամասն քայլերը:

Սակայն այն բանից հետո, երբ (1)-(5) կանոնները յուրացվել են, միջանկյալ հաշվարկները կարելի է բաց թողնել և միանգամից կիրառել այդ կանոնները:

Այսպիսով, եթե $a \neq 0$ և $b \neq 0$, ապա՝

1) $a^{-3} \cdot a^2 = a^{-3+2} = a^{-1}$;

2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = a^{-6+(-7)} = a^{-13}$;

3) $\dfrac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-3-(-2)} = a^{-1}$;

4) $\dfrac{a^5}{a^{-2}} = a^{5-(-2)} = a^7$;

5) $\dfrac{a^0}{a^5} = a^{0-5} = a^{-5}$;

6) $(a^{-3})^2 = a^{-3 \cdot 2} = a^{-6}$;

7) $(a^{-4})^0 = a^{-4 \cdot 0} = a^0 = 1$;

8) $(a^{-2})^{-3} = a^{-2 \cdot (-3)} = a^6$;

9) $(a \cdot b)^{-3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$; 10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^{3} = \frac{a^3}{b^3}$:

129. ա) Ի՞նչ կանոնով են բազմապատկում միևնույն թվի ամբողջ աստիճանները:
բ) Ի՞նչ կանոնով են բաժանում միևնույն թվի ամբողջ աստիճանները:
գ) Ի՞նչ կանոնով են թվի աստիճանը ամբողջ աստիճան բարձրացնում:
դ) Ի՞նչ կանոնով են գտնում երկու թվերի արտադրյալի ամբողջ աստիճանը:
ե) Ի՞նչ կանոնով են գտնում երկու թվերի քանորդի ամբողջ աստիճանը:

130. Ներկայացրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով՝
ա) $a^{-3} \cdot b^{-3}$; բ) $7^2 \cdot 2^{-3} \cdot 7$:

131. Արտահայտությունը ներկայացրեք աստիճանների արտադրյալի տեսքով՝
ա) $(a^2b^{-5})^3$; բ) $(a^{-7}b^2)^{-2}$; գ) $(a^{-3}b^{-5})^{-4}$:

132. Ապացուցեք, որ եթե $a \neq 0$, իսկ m, n, k-ն ամբողջ թվեր են, ապա
ա) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$;
բ) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$;
գ) $((a^m)^n)^k = a^{m \cdot n \cdot k}$:

Գրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով, եթե $a \neq 0$.

133. ա) $2^3 \cdot 2^4$; բ) $5 \cdot 5^6$; գ) $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4$;
դ) $7^2 \cdot 7 \cdot 7^5$; ե) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3 \cdot 3$; զ) $6^4 \cdot 6^4 \cdot 6^3 \cdot 6^2$;
է) $11^2 \cdot 11^2 \cdot 11^2$; ը) $9^3 \cdot 9^6 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 9$:

134. ա) $a^5 \cdot a^4$; բ) $a^3 \cdot a^8$; գ) $a^{10} \cdot a$;
դ) $a \cdot a^7$; ե) $a \cdot a$; զ) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$:

135. ա) $2^5 : 2^4$; բ) $3^7 : 3^8$; գ) $5^9 : 5$;
դ) $\frac{10^3}{10}$; ե) $\frac{5^7}{5^{13}}$; զ) $\frac{8^{12}}{8^{10}}$:

136. ա) $a^7 : a^3$; բ) $a^8 : a^{12}$; գ) $a^6 : a$;
դ) $\dfrac{a^{12}}{a^4}$; ե) $\dfrac{a^{20}}{a^{22}}$; զ) $\dfrac{a^{20}}{a}$:

137. ա) $\dfrac{10^2}{12^2}$; բ) $\dfrac{4^3}{5^6}$; գ) $\dfrac{25^4}{7^8}$;
դ) $\dfrac{(m^3)^4}{(a^4)^3}$; ե) $\dfrac{m^3m^5}{a^8}$; զ) $\dfrac{(n^6)^2}{a^{12}}$:

138. Համեմատեք՝
ա) 3^4 և 4^3; բ) 2^4 և 4^2; գ) 10^{20} և 20^{10};
դ) 100^{200} և 200^{100}; ե) 1999^{2000} և 1998^{1999}:

139. Ներկայացրեք a^2 հիմքով աստիճանի տեսքով՝
ա) $(a^5)^2$; բ) $(a^3)^4$; գ) $(a^6)^7$:

140. a^{50}-ը ներկայացրեք տվյալ հիմքով աստիճանի տեսքով՝
ա) a^5; բ) a^2; գ) a^{10}:

141. Ներկայացրեք քառակուսու տեսքով՝
ա) a^4; բ) a^{20}; գ) a^{50}:

142. Գոնե մի եղանակով ներկայացրեք երկու արտադրիչների տեսքով՝
ա) 7^{10}; բ) a^6; գ) $(cd)^7$:

143. Գոնե մի եղանակով ներկայացրեք երեք արտադրիչների տեսքով՝
ա) 5^6; բ) b^5; գ) $(ab)^4$:

144. a^{50}-ը ($a \neq 0$) ներկայացրեք տվյալ հիմքով աստիճանի տեսքով
ա) a^{-2}; բ) a^{-5}; գ) a^{10}; դ) a^{-10}; ե) a^{-25}:

145. Աստղանիշի փոխարեն գրեք այնպիսի թիվ, որ հավասարությունը ճիշտ լինի.
ա) $3^5 \cdot * = 3^8$; բ) $4^3 \cdot * = 4^6$; գ) $2^4 \cdot * = 2^2$;
դ) $(5^3)^* = 5^6$; ե) $(4^3)^* = 4^{15}$; զ) $2^* \cdot 3^* = 6^3$;
է) $4^5 : * = 4^2$; ը) $3^5 : * = 3^7$; թ) $(2 \cdot 3)^* = 6^5$:

2.3 Հանրահաշվական կոտորակներ և նրանց հատկությունները

Մենք արդեն նշել ենք, որ երկու բազմանդամների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը բազմանդամ է: Այժմ քննարկենք երկու բազմանդամների քանորդը:

Բազմանդամները կնշանակենք լատինական այբուբենի մեծատառերով A, B, C, D, ...: ***Հանրահաշվական կոտորակ է կոչվում*** $\frac{A}{B}$ ***արտահայտությունը՝*** A ***բազմանդամի և ոչ զրոյական*** B ***բազմանդամի քանորդը***:

A բազմանդամը կոչվում է $\frac{A}{B}$ հանրահաշվական կոտորակի համարիչ, իսկ B բազմանդամը՝ հայտարար:

$$\frac{a}{a+1} \text{ և } \frac{a^2-b^2}{3}$$

արտահայտությունները կարող են ծառայել որպես հանրահաշվական կոտորակների օրինակներ: Նկատենք, որ երկրորդ կոտորակի համարիչը $a^2 - b^2$ բազմանդամն է, իսկ հայտարարը՝ 3 թիվը, որը, ինչպես գիտենք, կարելի է դիտարկել որպես բազմանդամ:

Եթե A բազմանդամը a թիվն է (A = a), իսկ ոչ զրոյական B բազմանդամը՝ b թիվը (B = b, $b \neq 0$), ապա $\frac{A}{B}$ քանորդը $\frac{a}{b}$ թիվն է՝

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}:$$

Օրինակ, եթե A = –5, իսկ B = 3, ապա $\frac{A}{B}$ հանրահաշվական կոտորակը $\frac{-5}{3}$ թիվն է:

Հանրահաշվական կոտորակներն օժտված են հետևյալ հավասարություններով արտահայտվող հատկություններով՝

$$\frac{A}{1} = A, \qquad (1)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \qquad (2)$$

ցանկացած ոչ զրոյական C բազմանդամի համար,

$$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}: \qquad (3)$$

(1) հավասարությունը նշանակում է, որ A և 1 բազմանդամների քանորդը նույն A բազմանդամն է, այսինքն ցանկացած A բազմանդամ կարելի է դիտարկել որպես $\frac{A}{1}$ հանրահաշվական կոտորակ:

Օրինակ, $x - 2y = \frac{x - 2y}{1}$:

Դիտողություն 1: (2) հավասարության աջ մասի համարիչում և հայտարարում իրականում գրված են ոչ թե բազմանդամներ, այլ բազմանդամների արտադրյալներ հանդիսացող ամբողջ արտահայտություններ: Սակայն քանի որ բազմանդամների արտադրյալը կարելի է ձևափոխել բազմանդամի, ապա այնպիսի արտահայտություններ, ինչպիսիք են $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$-ն, որտեղ A, B և C-ն բազմանդամներ են, նույնպես անվանում են հանրահաշվական կոտորակներ: (2) հավասարությունը նշանակում է, որ եթե հանրահաշվական կոտորակի համարիչը և հայտարարը բազմապատկենք միևնույն ոչ զրոյական բազմանդամով, ապա կստացվի նրան հավասար հանրահաշվական կոտորակ:

2. Այսուհետ «հանրահաշվական կոտորակ» արտահայտության «հանրահաշվական» ածականը երբեմն բաց է թողնվում, սակայն ենթադրվում է:

(2) հավասարությամբ արտահայտվող հատկությունը անվանում են ***հանրահաշվական կոտորակի հիմնական հատկություն:***

$\frac{A}{B}$ կոտորակից $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ կոտորակին անցումը անվանում են $\frac{A}{B}$ կոտորակը նոր՝ $B \cdot C$ հայտարարի բերում:

Օրինակ՝ $\frac{x}{y}$ կոտորակը բերենք $3y$ հայտարարի, իսկ $\frac{x+1}{x-1}$ կոտորակը՝ $(x-1)^2$ հայտարարի՝

$$\frac{x}{y} = \frac{3 \cdot x}{3 \cdot y} = \frac{3x}{3y},$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x^2-1}{(x-1)^2}:$$

(2) հավասարությունը կարելի է գրել և հակառակ կարգով՝

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B}: \qquad (2')$$

(2՛) հավասարությունը նշանակում է, որ հանրահաշվական կոտորակը կարելի է կրճատել ոչ զրոյական բազմանդամով:

Օրինակ՝

$$\frac{2x + x^2}{3x - x^2} = \frac{x(2+x)}{x(3-x)} = \frac{2+x}{3-x},$$

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}:$$

(3) հավասարությունը նշանակում է, որ եթե $\frac{A}{B}$-ն հանրահաշվական կոտորակ է, ապա $\left(-\frac{A}{B}\right)$ արտահայտությունը նույնպես հանրահաշվական կոտորակ է և հավասար է (–A) և B կամ A և (–B) բազմանդամների քանորդին: Օրինակ՝

$$-\frac{a-b}{c-a}=\frac{-(a-b)}{c-a}=\frac{-a+b}{c-a} \text{ կամ } -\frac{a-b}{c-a}=\frac{a-b}{-(c-a)}=\frac{a-b}{-c+a}:$$

146. Ի՞նչն են անվանում հանրահաշվական կոտորակ, հանրահաշվական կոտորակի համարիչ և հայտարար: Բերեք օրինակներ:

147. Տված արտահայտությունը հանրահաշվական կոտորա՞կ է

ա) $7a$; բ) $x+y$; գ) $\frac{x-2ab}{x^2+y^2}$; դ) $\frac{x}{3a}-7xy$:

148. Գրեք երեք հատ հանրահաշվական կոտորակներ, օգտագործելով տված արտահայտությունները՝

ա) xy, $(a-b)$, $3mn^2$; բ) m^2-n^2, $-ab$, $4(x^2-y^2)$:

149. Կիրառելով հանրահաշվական կոտորակների հատկությունները՝ տրված հանրահաշվական կոտորակը գրեք բազմանդամի տեսքով՝

ա) $\frac{x-1}{1}$; բ) $\frac{3x+y}{1}$; գ) $\frac{x^2+3xy-y^2}{1}$;

դ) $\frac{x^2-2xy+y^2}{1}$; ե) $\frac{(x-y)6x}{3x}$; զ) $\frac{15(x+y)}{5}$;

է) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$; ը) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y}$:

150. Կոտորակը ձևափոխեք այնպես, որ նրա առջև դրված նշանը փոխվի հակադիրով՝

ա) $\frac{1-a}{a}$; բ) $-\frac{x}{x-3}$; գ) $\frac{x-y}{x+y}$; դ) $-\frac{a^2+1}{a-2}$;

ե) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$; զ) $-\frac{1}{2x+3y}$; է) $\frac{-a-b}{x+y}$; ը) $-\frac{-x-y}{-a-b}$:

151. ա) $\frac{5}{36}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{11}{3x}$, $\frac{7}{9x^2}$, $\frac{1}{4x}$ կոտորակները բերեք $36x^2$ հայտարարի

բ) $\frac{1}{20y}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{2x}$, $\frac{3}{5xy}$ կոտորակները բերեք $20x^2y$ հայտարարի:

152. A միանդամը կամ բազմանդամը ընտրեք այնպես, որ ստացվի ճիշտ հավասարություն՝

ա) $\frac{4a}{6a^3} = \frac{2}{A}$; բ) $\frac{12x^2y}{48xy} = \frac{x}{A}$;

գ) $\frac{3a^2(x+y)}{12ab(x+y)} = \frac{A}{4b}$; դ) $\frac{7mn(x-y)^2}{14(x-y)^3} = \frac{mn}{A}$:

Կրճատեք կոտորակը (153-160):

153. ա) $\frac{4}{8}$; բ) $\frac{8}{12}$; գ) $\frac{45}{210}$; դ) $\frac{256}{924}$;

ե) $\frac{2a}{6}$; զ) $\frac{14a}{21ab}$; է) $\frac{x^5}{x^7}$; ը) $\frac{8m^3n}{12m^2}$;

թ) $\frac{24a^5b^6c}{36a^7b^4c}$; ժ) $\frac{48x^3y^4z^3}{56xy^5z^4}$;

154. ա) $\frac{2(x+y)}{4ax}$; բ) $\frac{a+b}{a+b}$; գ) $\frac{2(x-1)}{5(x-1)}$;

դ) $\frac{3a(a-b)^2}{6a(a-b)^2}$; ե) $\frac{4x(x-y)^3}{16x^2y(x-y)}$; զ) $\frac{25m^2n(a-b)}{35mn^2(a-b)^2}$;

է) $\frac{2p(p-q)(p^2+q^2)}{4q(p-q)(p^2+q^2)}$; ը) $\frac{8a(a+b)^2(a-b)}{18a(a-b)(a+b)}$:

155. ա) $\frac{x-y}{y-x}$; բ) $\frac{2(a-b)}{3(b-a)}$; գ) $\frac{4mn(m-n)}{2m(n-m)}$; դ) $\frac{6a^2b^3(a-3)}{14ab^3(a-3)}$:

156. ա) $\frac{2x+2y}{4}$; բ) $\frac{3a+3b}{6a}$; գ) $\frac{4m-4n}{8mn}$;

դ) $\frac{12ab}{6a-6b}$; ե) $\frac{2a-2b}{4a+4b}$; զ) $\frac{6x+6y}{3x-3y}$:

157. ա) $\frac{ax-bx}{cx+dx}$; բ) $\frac{ac+bc}{mc+nc}$; գ) $\frac{x^2}{x^2+xy}$;

դ) $\frac{ab}{a-ab}$; ե) $\frac{m^2n}{m^2n-mn^2}$; զ) $\frac{ax-bx}{xy+x^2}$;

է) $\frac{p^2-p}{ap-bp}$; ը) $\frac{x^2-xy}{2xy+2x^2}$:

158. ա) $\frac{3xy}{3x^2a-3x}$; բ) $\frac{4m^2n}{6mn^2-8m^2n}$; գ) $\frac{3a^2+4ab}{9a^2b+12ab^2}$;

դ) $\frac{4xy-x^2}{4x^2y-x^3y}$; ե) $\frac{2mn-6m^2}{12m^2n-4mn^2}$; զ) $\frac{16p^3q^3-24p^2q^4}{12p^2q^3-8p^7q^2}$:

159. ա) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; բ) $\frac{x-1}{x^2-1}$; գ) $\frac{m^2-n^2}{2m+2n}$; դ) $\frac{xm+xn}{m^2-n^2}$;

ե) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; զ) $\frac{a^2-b^2}{b^2+2ab+a^2}$; է) $\frac{n^2-m^2}{(n-m)^2}$; ը) $\frac{p-p^2}{p^2-1}$;

թ) $\frac{x+x^2}{x^3-x}$; ժ) $\frac{a^3-2a^2}{4-a^2}$:

160. ա) $\frac{3m-3n}{m^3-n^3}$; բ) $\frac{1-a^3}{1+a+a^2}$; գ) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; դ) $\frac{2p^2-2p+2}{p^3+1}$;

ե) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-4}$; զ) $\frac{3x^2+6xy+3y^2}{12y^2-12x^2}$; է) $\frac{m^2-n^2}{n^3-m^3}$; ը) $\frac{2p^3-2q^3}{4q^2-4p^2}$;

թ) $\frac{6a^2-6b^2}{3a^3+3b^3}$; ժ) $\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{x^2-y^2}$:

161. Կազմեք կոտորակ, որը կրճատվի

ա) 2-ով, բ) $3ab$-ով, գ) $a+5$-ով,

դ) $-7m$-ով, ե) $a(x-2y)$-ով, զ) p^2-q^2-ով:

2.4 Հանրահաշվական կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելը

Օգտվելով կոտորակի հիմնական հատկությունից՝ ցանկացած երկու $\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{D}$ կոտորակներ կարելի է բերել ընդհանուր հայտարարի: Ընդ որում որպես ընդհանուր հայտարար միշտ կարելի է վերցնել տրված կոտորակների հայտարարների արտադրյալը՝

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D},\qquad \frac{C}{D}=\frac{C\cdot B}{D\cdot B}:$$

ՕՐԻՆԱԿ 1.

$\frac{1}{x-1}$ և $\frac{1}{x+1}$ կոտորակները ունեն $(x-1)(x+1)=x^2-1$ ընդհանուր հայտարարը, ուստի՝

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1}:$$

Սակայն հնարավոր է, որ B և D բազմանդամները ունենան R ընդհանուր արտադրիչ, այսինքն $B=B_1\cdot R$, $D=D_1\cdot R$, որտեղ B_1-ը և D_1-ը բազմանդամներ են: Այդ դեպքում որպես ընդհանուր հայտարար կարելի է վերցնել $B_1\cdot D_1\cdot R$ արտադրյալը, որը պարունակում է ավելի քիչ արտադրիչներ, քան $B\cdot D=B_1\cdot R\cdot D_1\cdot R$ արտադրյալը՝

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{B_1\cdot R}=\frac{A\cdot D_1}{B_1\cdot D_1\cdot R} \text{ և } \frac{C}{D}=\frac{C}{D_1\cdot R}=\frac{C\cdot B_1}{B_1\cdot D_1\cdot R}:$$

ՕՐԻՆԱԿ 2.

$\frac{1}{x^2-1}$ և $\frac{1}{(x-1)^2}$ կոտորակների համար որպես ընդհանուր հայտարար կարելի է վերցնել նրանց հայտարարների արտադրյալը՝ $(x^2-1)\cdot(x-1)^2$-ն: Սակայն, եթե տված կոտորակների հայտարարները վերլուծենք արտադրիչների, ապա կպարզվի, որ նրանք ունեն $x-1$ ընդհանուր արտադրիչը՝

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$(x-1)^2=(x-1)(x-1):$$

Այժմ պարզ է, որ տված կոտորակների ընդհանուր հայտարար հարմար է վերցնել

$$(x-1)(x+1)(x-1)=(x-1)^2(x+1)$$

արտադրյալը:

Այդ դեպքում՝

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)};$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)}:$$

Հետևաբար կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելիս օգտակար է նրանց հայտարարները վերլուծել արտադրիչների:

Երբեմն՝ երկու կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելիս, բավական է այդ կոտորակներից մեկի հայտարարի նշանը փոխել՝ միաժամանակ փոխելով նաև համարիչի կամ կոտորակի նշանը:

ՕՐԻՆԱԿ 3.

$\frac{3}{x-1}$ և $\frac{x}{1-x}$ կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելու համար փոխենք երկրորդ կոտորակի համարիչի և հայտարարի նշանները՝

$$\frac{x}{1-x}=\frac{-x}{x-1}:$$

162. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ցանկացած երկու հանրահաշվական կոտորակներ կարելի է բերել ընդհանուր հայտարարի, որը հավասար է նրանց հայտարարների արտադրյալին:

Կոտորակները բերեք ընդհանուր հայտարարի՝ (163-168):

163. ա) $\frac{2}{3}$ և $\frac{4}{5}$; բ) $\frac{3}{4}$ և $\frac{6}{7}$; գ) $\frac{8}{9}$ և $\frac{5}{-9}$;
դ) $\frac{4}{5}$ և $\frac{3}{-7}$; ե) $\frac{2}{3}$ և $\frac{5}{6}$; զ) $\frac{13}{14}$ և $\frac{6}{7}$;
է) $\frac{7}{9}$ և $\frac{5}{-3}$; ը) $\frac{1}{5}$ և $\frac{3}{-10}$; թ) $\frac{3}{10}$ և $\frac{4}{15}$;
ժ) $\frac{5}{12}$ և $\frac{1}{16}$; ի) $\frac{8}{14}$ և $\frac{5}{-21}$; լ) $\frac{7}{24}$ և $\frac{1}{-18}$:

164. ա) $\dfrac{x}{2}$ և $\dfrac{1}{3}$; բ) $\dfrac{x}{5}$ և $\dfrac{-3}{7}$; գ) $\dfrac{2x}{5}$ և $\dfrac{5}{-6}$;

դ) $\dfrac{2}{3}$ և $\dfrac{7x}{-4}$; ե) $\dfrac{5}{3x}$ և $\dfrac{7}{6}$; զ) $\dfrac{11}{2x}$ և $\dfrac{3}{7}$;

է) $\dfrac{4}{x}$ և $\dfrac{3}{-x}$; ը) $\dfrac{1}{5x}$ և $\dfrac{13}{-10x}$; թ) $\dfrac{3}{x}$ և $\dfrac{x}{3}$:

165. ա) $\dfrac{x}{x-2}$ և $\dfrac{1}{2-x}$; բ) $\dfrac{x}{5+x}$ և $\dfrac{3}{x+5}$;

գ) $\dfrac{4x}{x-1}$ և $\dfrac{2-7x}{1-x}$; դ) $\dfrac{2x}{3x+6}$ և $\dfrac{5}{x+2}$;

ե) $\dfrac{15}{2x-8}$ և $\dfrac{7}{x-4}$; զ) $\dfrac{3-x}{5-x}$ և $\dfrac{5}{2x-10}$:

166. ա) $\dfrac{x}{3x-x^2}$ և $\dfrac{4}{3-x}$; բ) $\dfrac{1}{2+x}$ և $\dfrac{x-1}{x^2-4}$;

գ) $\dfrac{3}{4+6x}$ և $\dfrac{5x}{9x+6}$; դ) $\dfrac{5x}{3-x}$ և $\dfrac{2}{x^2-9}$:

167. ա) $\dfrac{x}{4x+x^2}$ և $\dfrac{4}{3x+12}$; բ) $\dfrac{13x}{25-x^2}$ և $\dfrac{x-1}{10+2x}$;

գ) $\dfrac{x-3}{4-x^2}$ և $\dfrac{5x}{x^2-4}$; դ) $\dfrac{2}{(x-3)^2}$ և $\dfrac{1+x}{x^2-9}$:

168. ա) $\dfrac{3x}{x^2+4x+4}$ և $\dfrac{x-4}{5x+10}$; բ) $\dfrac{1+x}{x^2+2x+4}$ և $\dfrac{x-1}{x^3-8}$;

գ) $\dfrac{x}{9-3x-x^2}$ և $\dfrac{5}{x^3-27}$; դ) $\dfrac{12}{(x-3)^2}$ և $\dfrac{2+x}{(3-x)^2}$:

2.5 Թվաբանական գործողություններ հանրահաշվական կոտորակների հետ

Միևնույն հայտարարով $\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{B}$ հանրահաշվական կոտորակները գումարում և հանում են հետևյալ կանոններով՝

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}, \qquad (1)$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}: \qquad (2)$$

Իսկ եթե $\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{D}$ կոտորակները ունեն տարբեր հայտարարներ, ապա նախ դրանք բերում են ընդհանուր հայտարարի, այնուհետև գումարում կամ հանում (1) և (2) կանոններով:

Որպես ընդհանուր հայտարար միշտ կարելի է վերցնել B · D-ն և այդ դեպքում գումարումն ու հանումը կատարում են

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}, \qquad (1')$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D-C\cdot D}{B\cdot D} \qquad (2')$$

կանոններով:

$\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{D}$ կոտորակների բազմապատկումն ու բաժանումը կատարում են

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}, \qquad (3)$$

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}: \qquad (4)$$

կանոններով: Ընդ որում բաժանման դեպքում ենթադրվում է, որ C-ն ոչ զրոյական բազմանդամ է (ինչպես և B-ն ու D-ն):

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-1}=\frac{1+x}{x-1};$

2) $\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1;$

3) $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$;

4) $\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x+3}=\frac{x(x+3)-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+9}{x^2-9}$;

5) $\frac{x^2}{x^3-y^3}-\frac{x}{x^2+xy+y^2}=\frac{x^2}{x^3-y^3}-\frac{x^2-xy}{x^3-y^3}=\frac{x^2-(x^2-xy)}{x^3-y^3}=\frac{xy}{x^3-y^3}$;

6) $\frac{a-4}{a+3}\cdot\frac{a+3}{a}=\frac{(a-4)(a+3)}{(a+3)a}=\frac{a-4}{a}$;

7) $\frac{a-5}{a+7}:\frac{a-5}{8}=\frac{(a-5)\cdot 8}{(a+7)(a-5)}=\frac{8}{a+7}$:

3) և 4) օրինակներում տված կոտորակների հայտարարները տարբեր են և չունեն ընդհանուր արտադրիչներ: Որպես այդ կոտորակների ընդհանուր հայտարար վերցված է նրանց հայտարարների արտադրյալը, 5)-րդ օրինակում որպես ընդհանուր հայտարար վերցված է x^3-y^3 բազմանդամը, քանի որ

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2):$$

Ապացուցենք հատկություններ, որոնք բխում են հանրահաշվական կոտորակների հետ գործողությունների կատարման կանոններից:

1. Եթե B-ն ոչ զրոյական բազմանդամ է, ապա

$$\frac{0}{B}=0:$$

Իրոք, համարիչում 0-ն կարելի է փոքարինել $0\cdot B$-ով, իսկ հայտարարում B-ն՝ $1\cdot B$-ով: Այնուհետև օգտվելով հանրահաշվական կոտորակների հիմնական հատկությունից, ստացված կոտորակը կարելի է կրճատել B ոչ զրոյական բազմանդամով: Արդյունքում կստանանք 0 թիվը (զրոյական բազմանդամը)՝

$$\frac{0}{B}=\frac{0\cdot B}{1\cdot B}=\frac{0}{1}=0$$

$$\mathbf{2.}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A\cdot B}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}}:$$

Իրոք, $\frac{1}{A\cdot B}=\frac{1\cdot 1}{A\cdot B}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}$:

$$\mathbf{3.}\ \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}=\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}}:$$

Իրոք, $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot 1}{1\cdot B}=\frac{A}{1}\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}$:

Մասնավորապես, եթե B-ն թիվ է, օրինակ 7-է, ապա

$$\frac{A}{7} = \frac{1}{7} \cdot A:$$

Հետևաբար $\frac{A}{7}$ հանրահաշվական կոտորակը կարելի է դիտարկել որպես $\frac{1}{7} \cdot A$ բազմանդամ: Իհարկե, այս օրինակում 7 թիվը կարելի է փոխարինել զրոյից տարբեր ցանկացած թվով:

$$\textbf{4. } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} - \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} + \left(-\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}\right):$$

Իրոք, $\frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right) = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot (-C)}{B \cdot D} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A}{B} - \frac{C}{D}:$

$$\textbf{5. } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} - \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{0}:$$

Իրոք, $\frac{A}{B} - \frac{A}{B} = \frac{A - A}{B} = \frac{0}{B} = 0:$

169. Ի՞նչ կանոններով են գումարում, հանում, բազմապատկում և բաժանում հանրահաշվական կոտորակները:

170. Ապացուցեք հավասարությունը.

ա) $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{C}{-D}$; բ) $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A}{B} - \frac{C}{-D}$:

Կատարեք գործողությունները (171 -175).

171. ա) $\frac{x}{3} + \frac{y}{3}$; բ) $\frac{a}{7} - \frac{b}{7}$; գ) $\frac{2x}{5} - \frac{3y}{5}$;

դ) $\frac{5m}{4} + \frac{3n}{4}$; ե) $\frac{x}{4} + \frac{3x}{4}$; զ) $\frac{7a}{8} - \frac{3a}{8}$:

172. ա) $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}$; բ) $\frac{2a}{3} - \frac{1-a}{3}$; գ) $\frac{a+b}{5} + \frac{a}{5}$;

դ) $\frac{y}{7} - \frac{x-y}{7}$; ե) $\frac{2+x}{3} + \frac{2x-8}{3}$; զ) $\frac{2a}{8} - \frac{a+1}{8}$:

173. ա) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a}$; բ) $\frac{a}{x} + \frac{3}{x}$; գ) $\frac{a}{b} - \frac{2a}{b}$;

դ) $\frac{3x^2}{a}+\frac{2x^2}{a}$; ե) $\frac{x+4}{a}+\frac{2x}{a}$; զ) $\frac{x+1}{x}-\frac{x+3}{x}$:

174. ա) $\frac{3}{a+b}+\frac{5}{a+b}$; բ) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-1}$; գ) $\frac{a+3}{a+b}-\frac{a-3}{a+b}$;

դ) $\frac{m+1}{m+n}-\frac{3-m}{m+n}$; ե) $\frac{2x-4}{x-3}-\frac{3x+5}{x-3}$; զ) $\frac{7p-1}{p+1}-\frac{7-p}{p+1}$:

175. ա) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x}{1-x}$; բ) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y-x}$; գ) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{b-a}$;

դ) $\frac{4m-1}{n-m}-\frac{m-4}{m-n}$; ե) $\frac{2p+q}{p-2q}-\frac{p+3q}{2q-p}$; զ) $\frac{8a+b}{1-a}-\frac{2a-3b}{a-1}$:

176. A միանդամն ընտրեք այնպես, որ հավասարությունը ճիշտ լինի՝

ա) $\frac{2}{3}=\frac{A}{3}$; բ) $\frac{7}{10}=\frac{28}{A}$; գ) $\frac{3}{8}=-\frac{A}{32}$:

դ) $-\frac{1}{5}=\frac{15}{A}$; ե) $\frac{5}{a}=\frac{A}{ab}$; զ) $\frac{6x}{y}=\frac{A}{6xy^2}$:

177. Արտահայտությունը գրեք կոտորակի տեսքով՝

ա) $a+\frac{a}{2}$; բ) $x-\frac{x}{3}$; գ) $\frac{x}{7}-2x$;

դ) $2+\frac{a}{3}$; ե) $1+\frac{1}{a}$; զ) $\frac{1}{b}-a$:

Ձևափոխեք հանրահաշվական կոտորակի՝ (178-193):

178. ա) $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$; բ) $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$; գ) $\frac{2m}{3}-\frac{4}{5}$; դ) $\frac{4m}{3}+\frac{2n}{5}$;

ե) $\frac{3p}{4}+\frac{2p}{3}$; զ) $\frac{a^2}{4}-\frac{2a}{3}$; է) $\frac{7x^2}{3}+\frac{13x^2}{5}$; ը) $\frac{6xy}{7}-\frac{5xy^2}{9}$:

179. ա) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; բ) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$; գ) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$;

դ) $\frac{5a}{7}-\frac{b}{x}$; ե) $\frac{1}{2a}-\frac{1}{3}$; զ) $\frac{1}{a}-\frac{1}{bc}$:

180. ա) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$; բ) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$; գ) $\frac{1}{m+n}-\frac{1}{n}$;

դ) $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}$; ե) $\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{3}{a+b}$; զ) $\dfrac{4}{p-q}-\dfrac{3}{p+q}$;

է) $\dfrac{2a}{a-2b}+\dfrac{3a}{a+b}$; ը) $\dfrac{3x}{x-y}-\dfrac{2x}{2x-y}$; թ) $\dfrac{5m}{2m-n}-\dfrac{3m}{n-m}$;

ժ) $\dfrac{4p}{q-2p}-\dfrac{2p}{2p+q}$; ի) $\dfrac{7}{2x-y}-\dfrac{5}{y-2x}$; լ) $\dfrac{5x}{x-3y}+\dfrac{4x+3y}{3y-x}$:

181. ա) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{x}{4}$; բ) $\dfrac{a}{6}+\dfrac{a}{8}$; գ) $\dfrac{m^2}{3}-\dfrac{2m}{2}$;

դ) $\dfrac{a-1}{10}+\dfrac{a}{15}$; ե) $\dfrac{2x+3}{6}+\dfrac{x-1}{8}$; զ) $\dfrac{a-3}{10}-\dfrac{2-a}{15}$:

182. ա) $\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{3x}$; բ) $\dfrac{1}{m}+\dfrac{5}{4m}$; գ) $\dfrac{2}{p}+\dfrac{3}{pq}$;

դ) $\dfrac{a}{xy}-\dfrac{b}{x}$; ե) $\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{mn}$; զ) $\dfrac{a}{3b^2}+\dfrac{8}{2ab}$:

183. ա) $\dfrac{m}{ab}+\dfrac{m}{ac}$; բ) $\dfrac{2a}{mn}-\dfrac{5a}{mb}$;

գ) $\dfrac{2a-3b}{m}+\dfrac{4a-5b^2}{mb}$; դ) $\dfrac{x-y}{xy}-\dfrac{x-z}{xz}$:

184. ա) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}$; բ) $\dfrac{7}{m^4}-\dfrac{3a}{m^2}$; գ) $\dfrac{1}{a^5b^3}+\dfrac{1}{ab^7}$;

դ) $\dfrac{4}{x^4b^3}-\dfrac{3}{x^2b^5}$; ե) $\dfrac{3a}{x^7y^5z}-\dfrac{3b}{xy^4z^5}$; զ) $\dfrac{m^7n}{a^4b^3c^9}+\dfrac{3mn^2}{a^3b^6c^4}$:

185. ա) $\dfrac{1}{2a-2}+\dfrac{2}{4a-4}$; բ) $\dfrac{7a}{3x+3}-\dfrac{a}{6x+6}$;

գ) $\dfrac{2m}{4m+4n}+\dfrac{4n}{8m+8n}$; դ) $\dfrac{2p}{10p-10q}-\dfrac{3q}{15p-15q}$;

ե) $\dfrac{2x}{ax+bx}+\dfrac{3y}{ay+by}$; զ) $\dfrac{y}{ax-bx}-\dfrac{x}{ay-by}$;

ե) $\dfrac{1}{2x^2y-xy}+\dfrac{2}{y-2xy}$;

զ) $\dfrac{3}{3m^2n-6mn^2}-\dfrac{2}{4mn-2m^2}$;

թ) $\dfrac{15}{10p^3q-15p^2q^2}-\dfrac{6q}{9pq^3-6p^2q^2}$;

ժ) $\dfrac{3b}{2a^3b-8a^2b^2}-\dfrac{5a}{12a^3b-3a^4}$:

186. ա) $\dfrac{2a}{a^2-9}+\dfrac{3}{a-3}$;

բ) $\dfrac{5}{m+n}-\dfrac{4n}{m^2-n^2}$;

գ) $\dfrac{x}{4-9x^2}+\dfrac{1}{3x+2}$;

դ) $\dfrac{1}{2p+4q}-\dfrac{q}{4q^2-p^2}$;

ե) $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b}{a^3-b^3}$;

զ) $\dfrac{m^2+n^2}{m^3+n^3}-\dfrac{1}{2(m+n)}$;

է) $\dfrac{x^2-2xy}{(x-2y)^3}+\dfrac{1}{2y-x}$;

ը) $\dfrac{2(p+q)}{p^3-q^3}+\dfrac{3}{q^2-p^2}$:

187. ա) $3-\dfrac{7}{m-2}$;

բ) $1-\dfrac{x-y}{x+y}$;

գ) $\dfrac{(a+b)^2}{b}-2a$;

դ) $\dfrac{(a-b)^2}{2a}+b$;

ե) $a+b-\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$;

զ) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+a-b$:

188. ա) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}$;

բ) $\dfrac{x}{y}:\dfrac{a}{b}$;

գ) $\dfrac{4a}{7b}\cdot\dfrac{21}{a}$;

դ) $\dfrac{5}{8}:\dfrac{15q}{16p}$;

ե) $\dfrac{5ax}{6by}\cdot\dfrac{3x}{5y}$;

զ) $\dfrac{7}{a}\cdot\dfrac{5ax}{14by}$;

է) $\dfrac{8a^2y}{5bx}:\dfrac{3ay}{4b^2x}$;

ը) $\dfrac{25x^2y^3}{36ab}:\dfrac{35x^3y}{24b^2}$:

189. ա) $a\cdot\dfrac{a}{b}$;

բ) $\dfrac{a}{x}:a$;

գ) $\dfrac{a}{7x}\cdot 5x$;

դ) $ab:\dfrac{a}{b}$;

ե) $8a:\dfrac{20a^2b}{3x}$;

զ) $18p^3\cdot\dfrac{5x}{9p^2}$:

190. ա) $\dfrac{a+1}{7x}\cdot\dfrac{2x}{a+1}$;

բ) $\dfrac{2m}{m-n}:\dfrac{3mn}{m-n}$;

գ) $\dfrac{4p}{p-3}\cdot\dfrac{p-3}{2p^2}$;

դ) $\dfrac{x+y}{8a}:\dfrac{x+y}{16a^2b}$;

ե) $\dfrac{2x+2y}{3}\cdot\dfrac{6}{x+y}$;

զ) $\dfrac{4a}{a^2b}:\dfrac{5ab}{3a-3b}$;

է) $\dfrac{m-3n}{6m}\cdot\dfrac{3mn}{4m-12n}$; ը) $\dfrac{2p-4q}{3p^2}:\dfrac{3p-6q}{4pq}$;

թ) $\dfrac{ax-ay}{cd}\cdot\dfrac{cx+cy}{x-y}$; ժ) $\dfrac{mk}{am-an}:\dfrac{ka-k}{2m-2n}$;

191. ա) $\dfrac{a^2-b^2}{2a^2b}\cdot\dfrac{4ab^2}{a+b}$; բ) $\dfrac{(x-y)^2}{3x^2y^3}:\dfrac{x-y}{6xy^2}$;

գ) $\dfrac{mn-m^2}{2m}\cdot\dfrac{8n}{n^2-m^2}$; դ) $\dfrac{2a-4}{b+1}:\dfrac{a^2-4}{(b+1)^2}$;

ե) $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-xy}{2x^2-2y^2}$; զ) $\dfrac{16-m^2}{m^2-3m}:\dfrac{m^2+4m}{m^2-9}$:

192. ա) $\dfrac{p^2-q^2}{p^2}\cdot\dfrac{pq+q^2}{(p+q)^2}$; բ) $\dfrac{a^2-9b^2}{a^2-ab}:\dfrac{a^2+3ab}{a-b}$;

գ) $\dfrac{3x^2-3y^2}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x+y}{6x-6y}$; դ) $\dfrac{m^2-n^2}{(m+n)^2}:\dfrac{4m-4n}{3m+3n}$:

193. ա) $\dfrac{m^3+n^3}{2m}\cdot\dfrac{4mn}{m^2-mn+n^2}$; բ) $\dfrac{2a}{a^3-b^3}:\dfrac{6ab}{a^2-b^2}$;

գ) $\dfrac{m^3-n^3}{m^3+n^3}:\dfrac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$; դ) $\dfrac{x^2+xy}{6x^2-6y^2}\cdot\dfrac{3x^3+3y^3}{x^2-xy}$;

ե) $\dfrac{p^2-4q^2}{(p+2q)^2}:\dfrac{p^3-8q^3}{4q^2+2pq+q^2}$; զ) $\dfrac{12a^2+6ab}{8a^3-b^3}\cdot\dfrac{4a^2+2ab+b^2}{3a^2-6ab}$;

194. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $\dfrac{0}{2x}$, բ) $\dfrac{0}{m-n}$:

195. Հանրահաշվական կոտորակը ներկայացրեք հանրահաշվական կոտորակների արտադրյալի տեսքով՝

ա) $\dfrac{1}{2x}$; բ) $\dfrac{1}{a^2}$; գ) $\dfrac{2}{m^2n^3}$;

դ) $\dfrac{3}{(x-y)^2}$; ե) $\dfrac{a}{a^2-b^2}$; զ) $\dfrac{m}{m^3+n^3}$;

է) $\dfrac{1}{p^3-p}$; ը) $\dfrac{3}{2a^2+2ab}$:

196. Հանրահաշվական կոտորակը ներկայացրեք բազմանդամի տեսքով՝

ա) $\frac{m}{5}$; բ) $-\frac{a}{4}$; գ) $\frac{2x}{7}$;

դ) $-\frac{5y}{8}$; ե) $\frac{x-1}{3}$; զ) $\frac{2x-3}{2}$;

է) $\frac{x^2-3x}{10}$; ը) $\frac{m^2-mn+n^2}{8}$; թ) $\frac{(a-1)\cdot 3}{5}$;

ժ) $\frac{(p-q)(p+4)}{4}$:

197. Հայտնի է, որ $\frac{p}{q}$ կոտորակը անկրճատելի է: Անկրճատելի՞ է արդյոք հետևյալ կոտորակը՝

ա) $\frac{q}{p}$; բ) $\frac{p+q}{q}$; գ) $\frac{q}{p+q}$; դ) $\frac{p}{p+q}$:

2.6 Ռացիոնալ արտահայտություններ

Ռացիոնալ արտահայտություն կոչվում է այն արտահայտությունը, որում մի քանի հանրահաշվական կոտորակներ միացված են թվաբանական գործողությունների նշաններով: Ընդ որում այդ արտահայտությունը չպետք է պարունակի զրոյական բազմանդամի վրա բաժանման գործողություն:

Հանրահաշվական կոտորակը նույնպես անվանում են ռացիոնալ արտահայտություն:

Բերենք ռացիոնալ արտահայտությունների օրինակներ՝

$$\frac{x+2}{(x-3)^3}+1; \qquad \frac{a}{5}-5\cdot\frac{a(b-1)^3+\frac{1}{a}}{b+5\cdot\frac{b}{a}}:$$

Մենք բացառում ենք այնպիսի արտահայտությունները, որոնք պարունակում են զրոյական բազմանդամի վրա բաժանման գործողություն՝ որպես իմաստ չունեցող արտահայտություններ:

Օրինակ,

$$\frac{a+2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}; \qquad \frac{\frac{1}{a}}{c^3-c^3} \text{ և } \frac{4+x^2+y^2}{4y^2-(y+y)^2}$$

արտահայտությունները իմաստ չունեն, որովհետև պարունակում են զրոյական բազմանդամի վրա բաժանման գործողություն:

Ռացիոնալ արտահայտությունները կարելի է պարզեցնել՝ օգտվելով այն կանոններից, որոնք գործում են հանրահաշվական կոտորակների համար: Ընդ որում պետք է հաշվի առնել, որ ռացիոնալ արտահայտությունների համար ընդունված է գործողությունների կատարման այն հերթականությունը, ինչը որ կար թվային արտահայտությունների համար:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Պարզեցնենք

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}$$

արտահայտությունը:

Կիրառելով հանրահաշվական կոտորակների գումարման կանոնները՝ սկզբում ձևափոխենք առաջին կոտորակի համարիչը և հայտարարը՝

1) $1+\frac{1}{a}=\frac{a}{a}+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$;

2) $\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}=\frac{6a}{ab}+\frac{3b}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{6a+3b+3}{ab}$:

Այժմ առաջին կոտորակի համարիչը բաժանենք նրա հայտարարի վրա և կրճատենք ստացված կոտորակը՝

3) $\frac{a+1}{a}:\frac{6a+3b+3}{ab}=\frac{(a+1)ab}{a(6a+3b+3)}=\frac{(a+1)b}{6a+3b+3}$:

Երկրորդ կոտորակի համարիչը բաժանենք նրա հայտարարի վրա:

4) $\frac{ab}{3}:(2a+b+1)=\frac{ab}{3(2a+b+1)}=\frac{ab}{6a+3b+3}$:

Այժմ 3) հարցի արդյունքից հանենք 4)-րդ հարցի արդյունքը՝

5) $\frac{(a+1)b}{6a+3b+3}-\frac{ab}{6a+3b+3}=\frac{ab+b-ab}{6a+3b+3}=\frac{b}{6a+3b+3}$:

Այսպիսով, ցույց է տրված, որ

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}=\frac{b}{6a+3b+3}:$$

ՕՐԻՆԱԿ 2. Պարզեցնենք արտահայտությունը՝

$$A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)((x-y)^2+xy)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)((x+y)^2-xy):$$

Հաջորդաբար կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$A=\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)+\frac{y-x}{xy}(x^2+xy+y^2)=$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}+\frac{(y-x)(x^2+xy+y^2)}{xy}=$$

$$=\frac{x^3+y^3}{xy}+\frac{y^3-x^3}{xy}=\frac{x^3+y^3+y^3-x^3}{xy}=\frac{2y^3}{xy}=\frac{2y^2}{x}:$$

ՕՐԻՆԱԿ 3. Պարզեցնենք

$$A=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}$$

արտահայտությունը:

Հաջորդաբար կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$A=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x(x-y)}-\frac{(a+y)^2}{y(x-y)}=\frac{a^2(x-y)+(a+x)^2y-(a+y)^2x}{xy(x-y)}=$$

$$=\frac{a^2x-a^2y+a^2y+2axy+a^2y-a^2x-2axy-xy^2}{xy(x-y)}=\frac{x^2y-xy^2}{xy(x-y)}=$$

$$=\frac{xy(x-y)}{xy(x-y)}=1:$$

198. ա) Ի՞նչն են անվանում ռացիոնալ արտահայտություն:
բ) Ո՞ր արտահայտություններն իմաստ չունեն:

Պարզեցրեք ռացիոնալ արտահայտությունը (199-204).

199. ա) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc;$ բ) $5x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+3\right);$

գ) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\cdot\frac{ab}{c};$ դ) $3x^3\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}+\frac{4}{x}\right):$

200. ա) $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2+ay};$ բ) $\left(\frac{a}{a-1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a-1}\right);$

գ) $\left(m-\dfrac{1}{1+m}\right)\cdot\dfrac{m+1}{1-m-m^2}$; դ) $\left(a+\dfrac{a^2}{c}\right):\left(b+\dfrac{bc}{a}\right)$;

ե) $\left(\dfrac{a+x}{x}-\dfrac{2x}{x-a}\right):\dfrac{a^2+x^2}{x-a}$; զ) $\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1-2x}{x+2}$;

է) $\left(\dfrac{n}{n+x}-\dfrac{n}{n-x}\right):\left(\dfrac{n}{n-x}+\dfrac{n}{n+x}\right)$;

ը) $\dfrac{3}{5x}-\dfrac{3}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x+y}{5x}-x-y\right)$:

201. ա) $\left(a^2-\dfrac{1}{b^2}\right):\left(a-\dfrac{1}{b}\right)$; բ) $\left(\dfrac{3a^2}{4b^2}-\dfrac{b^2}{3}\right):\left(\dfrac{3a}{2b}+b\right)$;

գ) $\left(4x^2-\dfrac{1}{9b^2}\right):\left(2x-\dfrac{1}{3b}\right)$:

202. ա) $\dfrac{x+y}{x}-\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y^2}{x^2-xy}$; բ) $\dfrac{1}{m+2}+\dfrac{1}{m-2}-\dfrac{4}{m^2-4}$;

գ) $\dfrac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\dfrac{x}{ax+ay}+\dfrac{3}{2x+2y}\right)$;

դ) $\left(\dfrac{c-d}{c^2+cd}-\dfrac{c}{d^2+cd}\right):\left(\dfrac{d^2}{c^3-cd^2}+\dfrac{1}{c+d}\right)$:

203. ա) $\dfrac{a-1}{2a}\cdot\left(\dfrac{a+3}{a+1}-\dfrac{a^2-5}{a^2-1}\right)$; բ) $\left(\dfrac{c+3}{c-3}-\dfrac{c}{c+3}\right)\cdot\dfrac{c-3}{c+1}$;

գ) $\left(\dfrac{14+a^2}{a^2-4}-\dfrac{a-4}{a+2}\right)\cdot\dfrac{a-2}{6}$; դ) $\left(\dfrac{a}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}\right)\cdot\dfrac{a+4}{4}$;

ե) $\left(\dfrac{y+1}{y-1}-\dfrac{y-1}{y+1}\right)\cdot\dfrac{y+1}{4y}$; զ) $\left(\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{1-a}{1+a}\right):\dfrac{2a}{1-a}$;

է) $\dfrac{4y}{y-1}\cdot\left(\dfrac{y}{8}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8y}\right)$; ը) $\left(\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6a}\right):\dfrac{a+1}{12a}$:

204. ա) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}\cdot\dfrac{a}{a^2+ab+b^2}-(a-b)$; բ) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{a^2-b^2}+\dfrac{a^2}{a+b}$:

205. Արտահայտություններից որո՞նք իմաստ չունեն:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2};\quad \frac{7-\dfrac{x-a}{a^2-2a^2+a^2}}{x^2+a^2};\quad \frac{a^2+b^2-2ab}{(x-5)^2-x^2-25+10x};\quad \frac{1}{a-\dfrac{1}{a}-\dfrac{a^2-1}{a}}:$$

2.7 Ռացիոնալ արտահայտության թվային արժեքը

Օրինակի համար դիտարկենք

$$\frac{a^2+1}{a-1}+2a \qquad (1)$$

ռացիոնալ արտահայտությունը:

Եթե նրա մեջ a տառի փոխարեն տեղադրենք 3 թիվը, ապա կստանանք

$$\frac{3^2+1}{3-1}+2\cdot 3$$

թվային արտահայտությունը, որը հավասար է 11 թվին: 11 թիվը անվանում են ***(1) արտահայտության թվային արժեք*** $a = 3$ դեպքում: Հետագայում համառոտության համար «թվային» բառը հաճախ բաց է թողնվում, բայց ենթադրվում է:

$a = -1$ դեպքում (1) արտահայտության արժեքը հավասար է -3: Նման ձևով կարելի է հաշվել (1) արտահայտության արժեքը a-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, բացառությամբ $a = 1$ արժեքի: Չէ՞ որ $a = 1$ դեպքում (1) արտահայտությունը իմաստ չունի, որովհետև պարունակում է 0-ի վրա բաժանման գործողություն՝

$$\frac{1^2+1}{1-1}+2\cdot 1:$$

Ասում են, որ (1) արտահայտությունը որոշված է a-ի բոլոր թվային արժեքների համար, բացառությամբ $a = 1$ արժեքի:

Որպես երկրորդ օրինակ դիտարկենք

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \qquad (2)$$

ռացիոնալ արտահայտությունը:

Վերցնենք երկու թիվ: Դրանցից առաջինը տեղադրենք (2) արտահայտության մեջ x-ի փոխարեն, մյուսը՝ y-ի փոխարեն: Եթե այդ դեպքում հայտարարի արժեքը հավասար չէ զրոյի, ապա կստացվի թվային արտահայտություն, որը հավասար է որոշակի թվի: Այդ թիվը անվանում են ***(2) կոտորակի արժեք x-ի և y-ի տրված արժեքների համար:*** Մենք տեսնում ենք, որ (2) կոտորակը ունի արժեքներ x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների համար, միայն թե դրանք իրարից տարբեր լինեն:

Ասում են, որ ***(2) կոտորակը որոշված է*** x-ի՝ և y-ի իրարից տարբեր բոլոր արժեքների դեպքում ($x \neq y$):

Ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ (2) կոտորակի հայտարարը ոչ զրոյական բազմանդամ է: Սակայն x-ի և y-ի իրար հավասար արժեքների դեպքում նրա արժեքը դառնում է զրո: Բայց գոյություն ունեն x և y թվերի շատ զույգեր, որոնց համար հայտարարը զրո չի դառնում: Յուրաքանչյուր այդպիսի զույգի համար այդ կոտորակը ունի թվային արժեք, այսինքն որոշված է:

Նման կերպ սահմանվում են ցանկացած ռացիոնալ արտահայտությունների թվային արժեքները:

Օրինակ,

$$\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}-xyz$$

արտահայտությունը որոշված է x, y և z-ի ցանկացած թվային արժեքների համար, բացի $x = y = z = 0$ դեպքից:

$$\frac{1+\dfrac{d+a}{(c-d)^2}}{a^2+b^2+1}$$

արտահայտությունը որոշված է a, b, c և d-ի բոլոր թվային արժեքների համար, բացի այն արժեքներից որոնցում $c = d$:

$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ հանրահաշվական կոտորակը որոշված է նրա մեջ մտնող տառերի բոլոր թվային արժեքների համար բացառությամբ այն արժեքների, որոնց համար B հայտարարը դառնում է զրո:

Օրինակ,

$$\frac{x-y-z-t}{2x-3y}$$

կոտորակը որոշված է x, y, z և t-ի բոլոր թվային արժեքների համար, բացառությամբ այն արժեքների, որոնց համար $2x - 3y = 0$:

ԽՆԴԻՐ 1.* Ապացուցեք, որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ է

$$\frac{3}{x^2+2x+4} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, և պարզեք, թե x-ի ինչ արժեքի համար անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին: Քանի որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ են $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$ հավասարությունը և $(x + 1)^2 + 3 \geqslant 3$ անհավասարությունը, ապա ցանկացած x թվի համար ճիշտ է

$$\frac{3}{x^2+2x+4} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: Քանի որ

$$(x+1)^2+3=3$$

միայն $x = -1$ դեպքում, ապա անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին միայն $x = -1$ դեպքում:

ԽՆԴԻՐ 2.*

Ապացուցեք, որ ցանկացած x և y թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{5}{x^2+y^2-4x+10y+34} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, և որոշեք, թե x-ի և y-ի ինչպիսի արժեքների համար անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին:

Քանի որ ցանկացած x և y թվերի համար ճիշտ են

$$x^2+y^2-4x+10y+34=(x-2)^2+(y+5)^2+5$$

հավասարությունը և $(x-2)^2+(y+5)^2+5 \geqslant 5$ անհավասարությունը, ապա ցանկացած x և y թվերի համար ճիշտ է

$$\frac{5}{x^2+y^2-4x+10y+34} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: Քանի որ

$$(x-2)^2+(y+5)^2+5=5$$

միայն $x=2$ և $y=-5$ դեպքում, ապա անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին միայն $x=2$ և $y=-5$ դեպքում:

206. Տառերի ինչպիսի՞ թվային արժեքների դեպքում հանրահաշվական կոտորակը որոշված չէ:

207. Լրացրեք աղյուսակը՝ հաշվելով արտահայտությունների թվային արժեքները x-ի տված արժեքների համար:

x	0	-2	3	10^2	10^5	$-\frac{1}{2}$	$0{,}6$
$\frac{x}{x-1}$							
$\frac{x+1}{2x-3}$							

208. a-ի և b-ի ինչպիսի՞ արժեքների համար $\frac{a}{b}$ արտահայտությունը՝

ա) հավասար է զրոյի, բ) իմաստ չունի:

209. x-ի ինչպիսի՞ թվային արժեքների համար հանրահաշվական կոտորակի արժեքը հավասար է զրոյի՝

ա) $\frac{x-2}{5}$; բ) $\frac{x+4}{x}$; գ) $\frac{2-x}{x+3}$; դ) $\frac{2x+5}{3-x}$; ե) $\frac{x^2+x}{x+1}$:

210. Գրեք հանրահաշվական կոտորակ, որի արժեքը հավասար է զրոյի x-ի տված արժեքի դեպքում`

ա) 3; բ) –2; գ) 0,5; դ) $\frac{1}{3}$:

211. Գտեք արտահայտության արժեքը $x = 0$, $x = -2$, $x = 2^3$ դեպքում`

ա) $\frac{x}{2}$; բ) $\frac{10}{x}$; գ) $\frac{2-3x}{7x}$; դ) $\frac{x-2}{2-3x}$:

212. Լրացրեք աղյուսակը`

a	4	–10	6	0	–1	$-\frac{1}{2}$	–0,7
b	2	20	–5	7	0	–2	1,4
$\frac{a}{b+a}$							

213. Գտեք արտահայտության արժեքը`

ա) $\frac{4-x^2}{2+x}$ եթե $x = 1{,}04$; բ) $\frac{a^2-ab^2}{a-b}$ եթե $a = 2{,}5$, $b = \frac{1}{25}$;

գ) $\frac{9m^2+6mn+n^2}{3m+n}$ եթե $m = \frac{1}{3}$, $n = -5$;

դ) $\frac{a^3-p^3}{p-a}$ եթե $a = -\frac{1}{3}$, $p = -3$:

214. Պարզեցնելով ռացիոնալ արտահայտությունը` գտեք նրա արժեքը`

ա) $\left(\frac{a^2}{a+1} - \frac{a^3}{a^2+2a+1}\right) : \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{a^2-1}\right)$ եթե $a = -3$;

բ) $\left(\frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{7} - \frac{1}{4n}\right)$ եթե $n = 3$:

215. Գտեք ռացիոնալ արտահայտության արժեքը

$\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{n^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{an^2}\right) - a^2n$ $a = 0{,}02$, $n = -10$ դեպքում:

216. Տառերի ինչպիսի արժեքների դեպքում է որոշված արտահայտությունը՝

ա) $\frac{a+b}{a}$; բ) $\frac{1}{x-1}$; գ) $\frac{c}{c+3}$; դ) $\frac{a-3}{2a-6}$:

217. Լրացրեք աղյուսակը՝

a	b	$\frac{a}{b}$	$a-\frac{1}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a+b}$	$\frac{a^2-b^2}{a-2b}$
2	1					
–1	–3					
$\frac{1}{2}$	0,2					
0,4	$-\frac{1}{3}$					

218. Տառերի ինչպիսի արժեքների դեպքում է որոշված արտահայտությունը՝

ա) $\frac{3}{x^2}$; բ) $\frac{x}{x^2+y^2}$; գ) $\frac{xy-c}{m^2-n^2}$; դ) $\frac{ab+c}{p^2-q^2}$:

ե) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a}$; զ) $\frac{xy-5}{x+y}; \cdot \frac{x-y}{xy}$ է) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}$:

219. Տված հանրահաշվական կոտորակներից որո՞նք x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում ամբողջ արժեք չեն ընդունում:

$\frac{1}{x}$; $\frac{1-x}{1+x}$; $\frac{1}{x^2+4}$; $\frac{9}{x^3-1}$:

220. Տառերի ինչպիսի՞ թվային արժեքների համար տված կոտորակները հավասար են զրոյի և ինչպիսի՞ արժեքների համար որոշված չեն՝

$\frac{3x}{x-2}$; $\frac{m-38}{m}$; $\frac{2p-8}{p-3}$; $\frac{a+13}{2-3a}$:

221. Հաշվեք արտահայտության արժեքը՝

ա) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+a+\frac{b}{a}$ եթե $a=3$, $b=4$;

բ) $\frac{ab}{a^2+b^2}-a^2$ եթե $a=-3$, $b=4$;

գ) $\frac{xy-5}{x+y}\cdot\frac{x+y}{x-y}$ եթե $x=0$, $y=-3$:

222. Պարզեցրեք արտահայտությունը և հաշվեք նրա արժեքը՝

ա) $\dfrac{3m^2+6mn+3n^2}{6n^2-6m}$ եթե $m=0{,}5$, $n=\dfrac{2}{3}$;

բ) $\dfrac{2c^2-2b^2}{4b^2-8bc+4c^2}$ եթե $b=0{,}25$, $c=\dfrac{1}{3}$;

գ) $\dfrac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}+\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$ եթե $x=0{,}35$, $y=7{,}65$;

դ) $\dfrac{x^2+25}{(x-5)^2}+\dfrac{10x}{(5-x)^3}$ եթե $x=5{,}125$:

223. x-ի ինչպիսի՞ ամբողջ արժեքների համար կոտորակի արժեքը ամբողջ թիվ է՝

ա) $\dfrac{3}{x}$:

Լուծում:

Միայն $x=1, -1, 3, -3$ դեպքում է կոտորակի արժեքը ամբողջ թիվ:

բ) $\dfrac{3x+5}{x+1}$:

Լուծում.

Քանի որ

$$\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}+\frac{2}{x+1}=3+\frac{2}{x+1},$$ ապա

արտահայտության արժեքը ամբողջ թիվ է միայն $x=-3$, $x=-2$, $x=0$, $x=1$ դեպքում:

գ) $\dfrac{5}{x}$; դ) $\dfrac{3}{x-1}$; ե) $\dfrac{x+2}{x+1}$; զ) $\dfrac{4x+9}{x+2}$:

224. Գտեք x-ի այն թվային արժեքները, որոնց համար հանրահաշվական կոտորակի արժեքը բնական թիվ է:

ա) $\dfrac{12}{x+5}$; բ) $\dfrac{x+2}{x}$; գ) $\dfrac{x+2}{x-5}$; դ) $\dfrac{x^2-x}{x+1}$:

225. Ապացուցեք, որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ է անհավասարությունը՝

ա) $\dfrac{2}{x^2+6x+11}\leqslant 1$; բ) $\dfrac{4}{x^2-10x+29}\leqslant 1$; գ) $\dfrac{6}{x^2+8x+22}\leqslant 1$:

Որոշեք, թե x-ի ինչ արժեքի համար անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին:

226. Ապացուցեք, որ ցանկացած x և y թվերի համար ճիշտ է անհավասարությունը՝

ա) $\dfrac{3}{x^2+y^2-6x+2y+13} \leqslant 1$:   բ) $\dfrac{5}{x^2+y^2+8x-6y+30} \leqslant 1$:

Որոշեք, թե x-ի և y-ի ի՞նչ արժեքների համար անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին:

2.8 Ռացիոնալ արտահայտությունների ձևափոխումը

Նախկինում մենք արդեն զբաղվել ենք ռացիոնալ (մասնավորապես թվային) արտահայտությունների ձևափոխություններով: Այստեղ ցույց կտրվի, որ երբեմն այդ ձևափոխությունների գրառումը հեշտանում է, եթե օգտագործվում է ամբողջ ցուցիչով աստիճանը:

Հանրահաշվական կոտորակների կարճ գրառման համար ընդունված է կիրառել բացասական ցուցիչով աստիճանը: Օրինակ, $\dfrac{1}{(a-b)^2}$-ի փոխարեն գրում են $(a-b)^{-2}$, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}$-ի փոխարեն՝ $(2^{-1}+3^{-1})^{-1}$:

Այդպիսի կարճ գրառումից կարելի է օգտվել ռացիոնալ արտահայտությունները ձևափոխելիս: Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1. Ապացուցեք, որ ճիշտ է

$$(a^{-1}-b^{-1})\,(a^{-1}+b^{-1}) = a^{-2}-b^{-2}$$

հավասարությունը:

Նկատենք, որ հավասարության ձախ մասում գրված է a^{-1} և b^{-1} արտահայտությունների տարբերության և գումարի արտադրյալը, որը կարելի է գրել որպես այդ արտահայտությունների քառակուսիների տարբերություն՝

$$(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1}) = (a^{-1})^2-(b^{-1})^2 = a^{-2}-b^{-2}$$

Օրինակ 2.

Պարզեցնենք $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$ արտահայտությունը:

I եղանակ: Արտահայտությունը ձևափոխենք՝ օգտագործելով բնական ցուցիչով աստիճանի հատկությունը, տարբերության քառակուսու և քառակուսիների տարբերության բանաձևերը և հանբահաշվական կոտորակների հետ գործողությունների կատարման կանոնները՝

$$A=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a\text{b}}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{(b-a)\cdot ab}{(b+a)\cdot ab}=\frac{b-a}{b+a}:$$

II եղանակ: Նկատենք, որ կոտորակները բացասական ցուցիչով աստիճանի տեսքով գրելուց հետո տվյալ կոտորակի համարիչում ստացվում է a^{-1} և b^{-1} արտահայտությունների տարբերության քառակուսին, իսկ հայտարարում՝ դրանց քառակուսիների տարբերությունը՝

$$A=\frac{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}=\frac{(a^{-1}-b^{-1})^2}{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}=$$

$$=\frac{(a^{-1}-b^{-1})\cdot ab}{(a^{-1}+b^{-1})\cdot ab}=\frac{b-a}{b+a}:$$

Օրինակ 3. Հաշվել

$$\frac{(999^{-1}-1000^{-1})(999^{-1}+1000^{-1})}{(1000^{-1}-999^{-1})^2}$$

արտահայտության արժեքը:

I եղանակ. 999 և 1000 հայտարարներ ունեցող կոտորակների հետ մեծածավալ հաշվարկներից խուսափելու համար նշանակենք $a=999$, $b=1000$ և սկզբում ձևափոխենք

$$B=\frac{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}{(b^{-1}-a^{-1})^2}$$

տառային արտահայտությունը:

$$B=\frac{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}{(b^{-1}-a^{-1})^2}=\frac{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}{(a^{-1}-b^{-1})^2}=\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}=$$

$$=\frac{(a^{-1}+b^{-1})\cdot ab}{(a^{-1}-b^{-1})\cdot ab}=\frac{b+a}{b-a}:$$

Ստացված արտահայտության մեջ a-ի և b-ի փոխարեն տեղադրելով համապատասխանաբար 999 և 1000՝ կստանանք, որ որոնելի արտահայտությունը հավասար է՝

$$\frac{1000+999}{1000-999}=\frac{1999}{1}=1999:$$

II եղանակ. Նշանակենք $m = 999^{-1}$, $n = 1000^{-1}$ և ձևափոխենք

$$B=\frac{(m-n)(m+n)}{(m-n)^2}$$

տառային արտահայտությունը:

$$B=\frac{(m-n)(m-n)}{(m-n)^2}=\frac{m+n}{m-n}$$

Ստացված արտահայտության մեջ m-ի և n-ի փոխարեն տեղադրելով համապատասխանաբար 999^{-1} և 1000^{-1}՝ կստանանք, որ որոնելի արտահայտությունը հավասար է՝

$$\frac{999^{-1}+1000^{-1}}{999^{-1}-1000^{-1}}=\frac{\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}}{\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}}=\frac{\frac{1999}{999\cdot 1000}}{\frac{1}{999\cdot 1000}}=\frac{1999}{1}=1999:$$

Օրինակ. Պարզեցնենք

$$\left(\frac{a^{-2}}{4-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\frac{a^{-2}}{4+a^{-2}}\right)^{-2}$$

արտահայտությունը և գտնենք նրա արժեքը $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ դեպքում:

Քանի որ $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, ապա $a^{-2}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}$:

Ուստի՝

$$\left(\frac{a^{-2}}{4-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\frac{a^{-2}}{4+a^{-2}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{16}}{4-\frac{1}{16}}\right)^{-2}-\left(\frac{\frac{1}{16}}{4+\frac{1}{16}}\right)^{-2}=$$

$$\left(\frac{1}{4\cdot 16-1}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{4\cdot 16+1}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{63}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{65}\right)^{2}=63^2-65^2=$$

$$=(63-65)(63+65)=-256:$$

Պատասխան՝ -256:

Օրինակ 5.

Գտնենք $\dfrac{x^{-2}+3y^{-2}}{5x^{-2}+2y^{-2}}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\dfrac{x}{y}=2^{-1}$:

Քանի որ $\dfrac{x}{y}=2^{-1}$ ապա $y^{-2}\neq 0$: Կոտորակի համարիչը և հայտարարը բաժանելով y^{-2}-ի՝ կստանանք, որ

$$\frac{x^{-2}+3y^{-2}}{5x^{-2}+2y^{-2}}=\frac{\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}+3}{5\cdot\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}+2}=\frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}+3}{5\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}+2}=\frac{(2^{-1})^{-2}+3}{5(2^{-1})^{-2}+3}=\frac{2^2+3}{5\cdot 2^2+2}=\frac{7}{22}:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{7}{22}$:

227. Արտահայտությունը գրել առանց բացասական աստիճանների՝
ա) $a^{-1}+b^{-1}$; բ) $(a+b)^{-2}$; գ) $(a^{-2}-b^{-2})^{-1}$; դ) $(a+a^{-1})^{-1}$:

228. Հաշվել՝
ա) $5^{-1}+10^{-1}$; բ) $(0,5+1)^{-2}$; գ) $(2^{-4}+4^{-2})^{-1}$;
դ) $(2-2^{-1})^{-1}$; ե) $3^{-1}+9^{-1}$; զ) $(0,2+1)^{-1}$;
է) $(4^{-2}-4^{-3})^{-1}$; ը) $(3-3^{-1})^{-2}$:

229. Ապացուցեք, որ հավասարությունը ճիշտ է՝
ա) $(a^{-1}+b^{-1})^2=a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;
բ) $(a^{-1}-b^{-1})^2=a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;
գ) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}-b^{-3}$;
դ) $(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}+b^{-3}$:

230. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝
ա) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$; բ) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$; գ) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}$; դ) $\dfrac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}$:

231. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում արտահայտությունը հավասար է 0-ի՝
ա) $\dfrac{(a+3)^2}{(a-3)^{-2}}-\dfrac{(a-3)^2}{(a+3)^{-2}}$; բ) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^7-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{-7}$:

232. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝
ա) $\dfrac{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$; բ) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

գ) $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^{-5}$;

դ) $\left(\dfrac{a^2-a^{-2}}{a^2+a^{-2}}\right)^7 : \left(\dfrac{a^2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}\right)^{-7}$:

ե) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$;

զ) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{3}{a^2b}+\dfrac{3}{ab^2}-\dfrac{1}{b^3}}$:

233. Հաշվեք՝

ա) $\dfrac{2000^{-3}-1999^{-3}}{2000^{-2}+2000^{-1}\cdot 1999^{-1}+1999^{-2}}$;

բ) $\dfrac{1222^{-3}+777^{-3}}{1222^{-2}-1222^{-1}\cdot 777^{-1}+777^{-2}}$:

234. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $\dfrac{\dfrac{2a}{1-a}}{1-\left(\dfrac{1-a}{2a}\right)^{-1}}$

բ) $\dfrac{\dfrac{2a}{2-a}}{2-\left(\dfrac{2-a}{2a}\right)^{-1}}$;

գ) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x}\right)^{-1}$;

դ) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)^{-1}+\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{4}{x}\right)^{-1}$:

235. Պարզեցրեք արտահայտությունը

ա) $\dfrac{2a^{-2}}{3-a^{-2}}-\dfrac{2a^{-2}}{3+a^{-2}}$ և գտեք նրա արժեքը $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ դեպքում,

բ) $\dfrac{2a^{-2}}{1-a^{-2}}-\dfrac{2a^{-2}}{1+a^{-2}}$ և գտեք նրա արժեքը $a=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$ դեպքում,

գ) $\left(\dfrac{a^{-2}}{2-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{a^{-2}}{2+a^{-2}}\right)^{-2}$ և գտեք նրա արժեքը $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ դեպքում,

գ) $\left(\dfrac{2a^{-2}}{5-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2a^{-2}}{5+a^{-2}}\right)^{-2}$ և գտեք նրա արժեքը $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ դեպքում:

236. Գտեք արտահայտության արժեքը՝

ա) $\dfrac{3x^{-2}+2y^{-2}}{2x^{-2}+3y^{-2}}$, եթե $\dfrac{x}{y}=2^{-1}$

բ) $\dfrac{3x^{-2}-2y^{-2}}{2x^{-2}-3y^{-2}}$, եթե $\dfrac{x}{y}=3^{-1}$:

2.9 Ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական հավասարությունը

2.3 - 2.8 կետերում դիտարկված են ռացիոնալ արտահայտությունների հավասարություններ: Ահա այդպիսի հավասարություններից մեկը`

$$\frac{a^2+a+1}{a-3}=\frac{(a^2+a+1)(a-1)}{(a-3)(a-1)} \qquad (1)$$

Նրա ձախ մասը որոշված է a-ի` 3-ից տարբեր բոլոր թվային արժեքների համար, իսկ աջ մասը որոշված է $a$-ի` 3-ից և 1-ից տարբեր բոլոր թվային արժեքների համար: Այդ դեպքում (1) հավասարության երկու մասերը որոշված են a-ի` 3-ից և 1-ից տարբեր բոլոր թվային արժեքների համար: Ավելին, a-ի բոլոր այդպիսի արժեքների համար (1) հավասարության ձախ և աջ մասերի թվային արժեքները իրար հավասար են:

Իրոք, եթե (1) հավասարության մեջ a տառը փոխարինենք 3-ից և 1-ից տարբեր ցանկացած թվով, ապա կստանանք ստույգ թվային հավասարություն. չէ՞ որ այդ դեպքում ձախ մասը մի թվային կոտորակ է, իսկ աջ մասը` թվային կոտորակ, որը ստացվել է նրա համարիչը և հայտարարը միևնույն` զրոյից տարբեր թվով բազմապատկելով:

Ահա ևս մեկ օրինակ`

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{x-3+x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} \qquad (2)$$

(2) հավասարությունը վերածվում է ճիշտ թվային հավասարության x-ի բոլոր այն թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում որոշված են ձախ և աջ մասերը (այսինքն 2-ից և 3-ից տարբեր x-երի համար), որովհետև այդ դեպքում այն արտահայտում է սովորական կոտորակների գումարման կանոնը:

Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների հավասարությունը անվանում են ***նույնություն*** կամ ***նույնական հավասարություն,*** եթե այն վերածվում է ճիշտ թվային հավասարության նրա մեջ մտնող տառերի բոլոր այն թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում այդ երկու արտահայտությունները որոշված են:

Վերը ապացուցված է, որ (1) և (2) հավասարությունները նույնություններ են: Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների ցանկացած այլ հավասարության համար կարելի է անել նման տիպի դատողություններ:

Այսպիսով, ***երկու ռացիոնալ արտահայտությունների ցանկացած ճիշտ հավասարություն նույնություն է:***

Դրա համար էլ հետագայում «ապացուցենք, որ հավասարությունը ճիշտ է» նախադասության փոխարեն հաճախ կգրենք «ապացուցենք նույնությունը»: Նույնությունները ապացուցելիս օգտվում են այն կանոններից, որոնց ենթարկվում են հանրահաշվական կոտորակները: Ընդ որում ամեն անգամ նկատի է առնվում, որ ապացուցվող հավասարությունը ճիշտ է տառերի այն թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում ձախ և աջ մասերը որոշված են (այդ թվային արժեքներն անվանում են նաև ***փոփոխականների թույլատրելի արժեքների բազմություն***):

Երբեմն, դիտարկելով նույնությունը, լրացուցիչ նշում են տառերի այն թվային արժեքները, որոնց համար որոշված են նույնության երկու մասերը:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Ապացուցենք նույնությունը՝

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=0: \qquad (3)$$

Ապացույց: Տառերի բոլոր արժեքների համար, որոնց դեպքում ձախ մասը որոշված է, ունենք՝

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{x+y}{(x-y)(x+y)}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}-\frac{2y}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x+y-(x-y)-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y-x+y-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{0}{(x-y)(x+y)}=0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նշենք, որ (3) նույնության երկու մասերը որոշված են x-ի և y-ի այնպիսի արժեքների համար, որ $|x| \neq |y|$:

ՕՐԻՆԱԿ 2.* Ապացուցենք

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(z-x)(y-x)}=0 \qquad (4)$$

նույնությունը:

Ապացույց: Տառերի բոլոր թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում (4) հավասարության ձախ մասը որոշված է, ունենք՝

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(z-x)(y-x)}=$$

$$=\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(x-z)(x-y)}=$$

$$=\frac{x-z}{(x-y)(y-z)(x-z)}-\frac{x-y}{(x-y)(y-z)(x-z)}-\frac{y-z}{(x-y)(y-z)(x-z)}=$$

$$=\frac{x-z-(x-y)-(y-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{x-z-x+y-y+z}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{0}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Ապացուցենք

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a-b} \qquad (5)$$

նույնությունը:

Ապացույց: Տառերի բոլոր այն արժեքների համար, որոնց դեպքում (5) հավասարության երկու մասերը որոշված են, ունենք՝

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=a-b-(a+b)=a-b-a-b=-2b;$$

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}-\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=$$

$$=a-b-(a+b)=a-b-a-b=-2b:$$

Հետևաբար (5) հավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին տառերի բոլոր այն արժեքների համար, որոնց դեպքում երկու մասն էլ իմաստ ունեն, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Դիտողություն: Այս կետում բերված նույնության սահմանումը չի հակասում ամբողջ արտահայտությունների նույնական հավասարության նախկինում բերված սահմանմանը, որովհետև ամբողջ արտահայտությունը որոշված է նրա մեջ մտնող տառերի բոլոր թվային արժեքների համար:

237. Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների ինչպիսի՞ հավասարությունն են անվանում նույնություն:

238. Բերեք միայն x տառը պարունակող երկու բազմանդամների ստույգ հավասարության օրինակ: Արդյոք այդ հավասարությունը նույնությո՞ւն է:

239. Բերեք x պարունակող երկու արտահայտությունների ստույգ հավասարության օրինակ, որի ձախ մասը որոշված է 0-ից և 1-ից տարբեր x-ի բոլոր արժեքների համար, իսկ աջ մասը՝ x-ի 0-ից տարբեր բոլոր արժեքների համար: Հանդիսանո՞ւմ է արդյոք այդ հավասարությունը նույնություն:

240. Տառերի ի՞նչ արժեքների դեպքում են որոշված հավասարության երկու մասերը՝

ա) $a+b=b+a$;

բ) $ab+ac=a(b+c)$;

գ) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{b}\cdot a$;

դ) $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}$;

ե) $\dfrac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$;

զ) $x-y=\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$;

է) $\dfrac{m^3+m}{m^2+1}=m$;

ը) $m^2-m+1=\dfrac{m^3+1}{m+1}$;

թ) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}=\dfrac{1}{a-b}$;

ժ) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$:

Հանդիսանո՞ւմ են արդյոք այդ հավասարությունները նույնություններ:

Ապացուցեք նույնությունը՝ (241-244):

241. ա) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot(x^2-2x+1)=\dfrac{2x-2}{x+1}$;

բ) $\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot(x^2-4x+4)=\dfrac{4x-8}{x+2}$:

242. ա) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=0$;

բ) $\dfrac{2y}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=0$;

գ) $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{y}=2$;

դ) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x}=2$;

ե) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot(x^2-y^2)=2x$;

զ) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot(x^2-y^2)=2y$:

243. ա) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{1}{(a-c)(b-a)}=0$;

բ) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

գ) $\dfrac{a^4-b^4}{((a+b)^2-4ab)((a-b)^2+4ab)((a+b)^2-2ab)}=\dfrac{1}{a^2-b^2}$:

244. ա) $\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\frac{6a+b}{a^2-b^2}:\frac{6a^3+b^3+a^2b+6ab^2}{2ab^2-2a^2b}+\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2+b^2}{ab\,(a+b)}$;

բ) $\left(\frac{x}{xy+y^2}-\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\frac{y}{x^2-xy}\right):\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{y(x-y)}$;

գ) $\left(\frac{2x^2y+2xy^2}{7x^3+x^2y+7xy^2+y^3}\cdot\frac{7x+y}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot(x^2-y^2)=x+y$;

դ) $\left(\frac{5}{a^2-2a-ax+2x}-\frac{1}{8-8a+2a^2}\cdot\frac{20-10a}{x-2}\right):\frac{25}{x^3-8}=\frac{x^2+2x+4}{5(a-x)}$;

ե) $\left(\frac{3a}{9-3x-3a+ax}-\frac{1}{a^2-9}:\frac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3a}=\frac{x^2+3x+9}{a-x}$:

245. Կրճատեք կոտորակը՝

ա) $\frac{8a^2c+16abc-4ac^2}{6bc^2-12abc-24b^2c}$; բ) $\frac{30m^2k-70mnk-40mk^2}{56n^2k+32nk^2-24mnk}$;

գ) $\frac{15a^3bc-30a^2b^2c+15ab^3c}{12a^3c^2-12ab^2c^2}$; դ) $\frac{80m^2n^3k^2-20m^4nk^2}{16m^3nk^2-64m^2n^2k^2+64mn^3k^2}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

246. ա) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$; բ) $\frac{1}{b}+\frac{3}{2b}$; գ) $\frac{3}{x-a}-\frac{x}{x-a}$;

դ) $\frac{b}{a-b}-\frac{5}{b-a}$; ե) $\frac{3k}{b}+\frac{2b}{k}$; զ) $\frac{3b}{(b-1)^2}+\frac{2}{1-b}$;

է) $\frac{2x-1}{x^2-4}+\frac{4}{x-2}$; ը) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

թ) $\frac{3x}{x^2-2x+1}-\frac{6}{x^2-1}-\frac{3x-2}{x^2+2x+1}$:

247. ա) $\frac{ba^2}{(1-a)^2}-\frac{b}{(a-1)^2}$; բ) $\frac{2a}{(a-1)^3}+\frac{1+a^2}{(1-a)^3}$:

248. Տված կոտորակը ձևափոխեք կոտորակների գումարի, օրինակ՝

$$\frac{3x^2-8x+4}{x}=\frac{3x^2}{x}-\frac{8x}{x}+\frac{4}{x}=3x-8+\frac{4}{x}$$

ա) $\frac{m+n}{3}$; բ) $\frac{x-2}{5}$; գ) $\frac{1-2x}{x}$;

դ) $\dfrac{3a-8b}{ab}$; ե) $\dfrac{x^2-2x}{x^3}$; զ) $\dfrac{4y-9y^2}{12y}$;

է) $\dfrac{5x^3+2x^2-x-8}{2x}$; ը) $\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$;

թ) $\dfrac{12-7x+x^2}{x-4}$; ժ) $\dfrac{12m^4-9m^2+m-6}{3m^2}$:

249. A, B և C-ի փոխարեն ընտրեք այնպիսի ամբողջ արտահայտություններ, որ ստացվի ճիշտ հավասարություն, և պարզեցրեք ստացված կոտորակը՝

ա) $\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{(a-1)(a-1)+(a+1)(a+1)}{\mathrm{A}}$;

բ) $\dfrac{m}{3m-1}+\dfrac{2m}{5-2m}=\dfrac{m(5-2m)+2m(3m-1)}{\mathrm{A}}$;

գ) $\dfrac{\mathrm{B}}{x+2}-\dfrac{\mathrm{C}}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-1)+3x(x+2)}{\mathrm{A}}$;

դ) $\dfrac{\mathrm{B}}{p-q}-\dfrac{\mathrm{C}}{p^2-q^2}=\dfrac{(p+q)(p+q)-2pq}{\mathrm{A}}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

250. ա) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right):\left(\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{b^2}-1}\right)$;

բ) $\left(\dfrac{x^2y-xy^2}{x-y}+xy\right)\cdot\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$;

գ) $\left(\dfrac{n}{m-n}+\dfrac{m}{m+n}\right)\cdot\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{n^2}{m^2}-2\right)$;

դ) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}+4x\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$;

ե) $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3}{a^3-x^3}$;

զ) $\dfrac{4x-3}{3-2x}-\dfrac{4+5x}{3+2x}-\dfrac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$:

251. ա) $\dfrac{x^5}{x^2-6x+9}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^3+3x^2}-\dfrac{3x^5+81x^2}{x^2}:(x^2-9)$;

բ) $\dfrac{a^2}{a^2+4a+4}\cdot\dfrac{a^2-4}{a^3-2a^2}+\dfrac{a^5-8a^2}{a}:(a^2-4)$;

գ) $\left(\dfrac{m+2}{8-8m+2m^2}+\dfrac{1}{4-2m}-\dfrac{2}{m^2-4m+4}\right)\cdot 3m-3m$;

դ) $\left(\dfrac{2}{a^2-4a+4}-\dfrac{1}{4-2a}-\dfrac{a+2}{2(2-a)^2}\right)\cdot 5a-5a$;

ե) $\left(\dfrac{1}{2-4c}+\dfrac{1+c}{8c^3-1}:\dfrac{1+2c}{4c^2+2c+1}\right)\cdot\dfrac{4c-2}{2c+1}-\dfrac{1}{(1+2c)^2}$;

զ) $\left(\dfrac{1}{2-4b}+\dfrac{b+1}{8b^3-1}\cdot\dfrac{4b^2+2b+1}{1+2b}\right):\dfrac{2b+1}{4b-2}-\dfrac{1}{(2b+1)^2}$:

252. ա) $\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y}{x+2y}+\dfrac{x^2+3xy-2y^2}{4y^2-x^2}$;

բ) $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}-\dfrac{x^2-x+1}{x^3+1}$:

253. ա) $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{a-\frac{1}{b}}$; բ) $\dfrac{m-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{m}}$; գ) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; դ) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}+\frac{m}{n}}$;

ե) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$; զ) $\dfrac{\frac{1}{1-m}+\frac{1}{1+m}}{\frac{1}{1-m}-\frac{1}{1+m}}$; է) $\dfrac{\frac{c}{c-1}-\frac{c+1}{c}}{\frac{c}{c+1}-\frac{c-1}{c}}$:

254. Հայտնի է, որ $x+\dfrac{1}{x}$-ը ամբողջ թիվ է: Ապացուցեք, որ

ա) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ բ) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

ամբողջ թվեր են:

255. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$; բ) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$; գ) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$; դ) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$:

256. Ներկայացրեք կոտորակների տարբերության տեսքով՝

ա) $\dfrac{1}{1\cdot 2}$; բ) $\dfrac{1}{3\cdot 4}$; գ) $\dfrac{1}{x(x+1)}$; դ) $\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$:

257. Հաշվեք՝

ա) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{9\cdot 10}$;

բ) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$;

գ) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+...+\frac{1}{98\cdot 100}$:

258. Ապացուցեք, որ ցանկացած n բնական թվի համար՝

ա) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}<1$;

բ) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}<\frac{1}{2}$:

259. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$;

բ) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$;

գ) $\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}$;

դ) $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$:

Ապացուցեք նույնությունը՝

260. ա) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=x+y$;

բ) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{x-y}$;

գ) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)=-m$;

դ) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=a-b$:

261. ա) $\left(\dfrac{m^2+2m}{4m^2-n^2}-\dfrac{1}{2m+n}\right):\dfrac{m^2+n}{20m^2+10mn}+\dfrac{5n}{n-2m}=5;$

բ) $\dfrac{5a}{5a+3b}+\left(\dfrac{5a+3b}{5a-3b}-\dfrac{25a^2}{25a^2-9b^2}\right)\cdot\dfrac{5a-3b}{10a+3b}=1;$

գ) $\left(\dfrac{2a}{a^2-16}-\dfrac{4}{4+a}\right)\cdot\dfrac{a+4}{8-a}+\dfrac{a^2}{32-8a}=-\dfrac{a+4}{8};$

դ) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{x+y}{xy-y^2}\right)+\dfrac{x}{x+y}=1;$

ե) $\dfrac{m}{m^2-2m+1}-\dfrac{1}{1-m}\cdot\dfrac{m}{m+1}-\dfrac{2}{m+1}=\dfrac{m}{(m-1)^2}-\dfrac{m-2}{m^2-1};$

զ) $\left(\dfrac{a}{b^2+ab}-\dfrac{a-b}{a^2+ab}\right):\left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{1}{a+b}\right)=\dfrac{a}{b}-1:$

262. Դիոֆանտի «Թվաբանություն»-ում (III դ.) պարունակվում են շատ նույնություններ: Ապացուցեք դրանցից երկուսը, որոնք տրված են ժամանակակից գրառմամբ՝

ա) $\dfrac{144}{x^4-60x^2+900}\cdot 30+\dfrac{60}{x^2-30}=\dfrac{60x^2+2520}{x^4-60x^2+900};$

բ) $\dfrac{96}{x^4-12x^2+36}-\dfrac{12}{6-x^2}=\dfrac{12x^2+24}{x^4-12x^2+36}:$

263. Ապացուցեք Լ. Էյլերի նույնությունը՝

$a^3+b^3+\left(\dfrac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\dfrac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3:$

264. Տառերի ինչպիսի արժեքների դեպքում տված կոտորակը հավասար է զրոյի՝

ա) $\dfrac{x}{x^2+2};$ բ) $\dfrac{6m}{m-8};$ գ) $\dfrac{a-4}{a+1};$

դ) $\dfrac{2y-5}{y^2};$ ե) $\dfrac{3x+7}{2x-5};$ զ) $\dfrac{6-9x}{5+4x}:$

Գտեք արտահայտության արժեքը (265-266).

265. ա) $\frac{7}{5a+5}-\frac{3}{10a+10}$ եթե $a=10$;

բ) $\frac{2a-1}{2a}-\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a-4a^2}$ եթե $a=-\frac{1}{2}$:

266. ա) $\left(\frac{x-2}{x^2-2x+4}-\frac{6x-13}{x^3+8}\right):\frac{15-5x}{2x^3+16}$ եթե $x=3,5$;

բ) $\left(\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{4x+5}{x^3+1}\right):\frac{2-x}{4x^2-4x+4}$ եթե $x=0,6$;

գ) $\frac{8a^3-27b^3}{(3b+2a)^2-6ab}$ եթե $a=2,5$; $b=-1\frac{2}{3}$;

դ) $\frac{64a^3+8b^3}{(2a-b)^2+2ab}$ եթե $a=-0,25$; $b=1\frac{7}{8}$:

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

$$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,(17) = \frac{17}{99}$$

$$0,1010010001... = ?$$

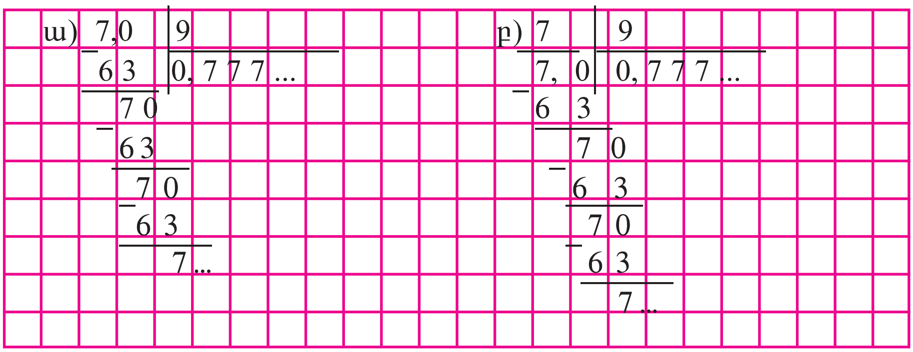
3.1 Պարբերական տասնորդական կոտորակներ

5-րդ, 6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացից դուք արդեն ծանոթ եք բնական և ամբողջ թվերին, ինչպես նաև սովորական և տասնորդական կոտորակներին: Դուք գիտեք, թե ինչպես են համեմատում վերջավոր (այսինքն ստորակետից հետո վերջավոր հատ թվանշաններ պարունակող) տասնորդական կոտորակները, ինչպես են դրանց հետ կատարում թվաբանական գործողություններ և կլորացնում (մոտարկում) այդ թվերը: Գիտեք նաև, որ տասնորդական կոտորակների քանորդը միշտ չէ, որ կարելի է գրել վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով: Հայտնի է նաև, թե ինչպես են տասնորդական կոտորակը փոխարինում սովորական կոտորակով և սովորական կոտորակը՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակով, ընդ որում եթե վերջավոր տասնորդական կոտորակը գրենք $\frac{p}{q}$ անկրճատելի սովորական կոտորակի տեսքով, ապա նրա q հայտարարը 2-ից և 5-ից բացի այլ պարզ բաժանարարներ չի ունենա, և հակառակը, եթե անկրճատելի $\frac{p}{q}$ կոտորակի q հայտարարը 5-ից և 2-ից բացի այլ պարզ բաժանարարներ չունի, ապա այդ կոտորակը կարելի է ներկայացնել վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով: Այստեղից հետևում է, որ ***եթե անկրճատելի*** $\frac{p}{q}$ ***կոտորակի հայտարարը 2-ից և 5-ից տարբեր պարզ արտադրիչ ունի, ապա այդ կոտորակը չի վերածվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի:***

Ուրեմն այդ կոտորակի համարիչը հայտարարին անկյունով բաժանելու միջոցով չի կարող վերջավոր տասնորդական կոտորակ ստացվել:

Օրինակ 1: $\frac{7}{9}$ թիվը վերածենք տասնորդական կոտորակի:

Դա անկրճատելի կոտորակ է, որի հայտարարն ունի 2-ից ու 5-ից տարբեր՝ 3 պարզ արտադրիչը: Այդ պատճառով $\frac{7}{9}$ թիվը նախահայտորեն չի վերածվի վերջավոր տասնորդական կոտորակի: Այնուամենայնիվ, այդ կոտորակի համարիչն անկյունով բաժանենք հայտարարին (նկ. 7 ա, այդ բաժանման մի այլ գրառում ցույց է տրված նկ. 7 բ-ում):



Նկ. 7

Բաժանման յուրաքանչյուր փուլում ստացվում է միևնույն 7 մնացորդը, իսկ քանորդում՝ միևնույն 7 թվանշանը: Այդ գործընթացը անվերջ է (վերջ չունի): Այն հանգեցնում է 0,777... արտահայտությանը, որտեղ դրված կետերը նշանակում են, որ 7 թվանշանը կրկնվում է անվերջ անգամ:

0,777... արտահայտությունն անվանում են ***անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ*** կամ պարզապես ***պարբերական կոտորակ:*** Այն գրառում են նաև 0,(7) ձևով և կարդում են՝ «զրո ամբողջ, 7-ը պարբերության մեջ»: 7 թիվն անվանում են 0,(7) կոտորակի ***պարբերություն:***

Ասում են, որ $\frac{7}{9}$-ը գրառված է 0,(7) պարբերական կոտորակի տեսքով, կամ որ 0,(7)-ը $\frac{7}{9}$-ը թվի ***տասնորդական ներկայացումն է:*** Գրում են՝

$$\frac{7}{9} = 0{,}777... = 0{,}(7):$$

Պետք է նկատի ունենալ, որ $\frac{7}{9}$-ը և 0,(7)-ը միևնույն թվի տարբեր նշանակում են՝ $\frac{7}{9}$ սովորական կոտորակի տեսքով և 0,(7) անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

Օրինակ 2: $\frac{2}{99}$ թիվը վերածենք տասնորդական կոտորակի:

$\frac{2}{99}$ կոտորակն անկրճատելի է, և նրա հայտարարը 2-ից ու 5-ից տարբեր պարզ բաժանարար ունի: Այդ պատճառով այն չի կարող վերածվել վերջավոր տասնորդական կոտորակի: Այդ կոտորակի համարիչն անկյունով բաժանենք նրա հայտարարին.

$$\begin{array}{r|l} -\;2{,}0000 & 99 \\ \cline{2-2} 1\,98 & 0{,}0202... \\ \cline{1-1} -\;200 & \\ 198 & \\ \cline{1-1} 2 & \\ ... & \end{array}$$

Համարիչը հայտարարին անկյունով բաժանելու գործընթացն այստեղ անվերջ է, այն հանգեցնում է 0,0202... պարբերական կոտորակի ստացմանը: Թվանշանների (02) խումբը 0,0202... կոտորակի պարբերությունն է: Այս պարբերական կոտորակը գրում են՝ 0,(02) և կարդում այսպես՝ «զրո ամբողջ, զրո երկուսը պարբերության մեջ»:

Ասում են, որ $\frac{2}{99}$-ը գրառված է 0,(02) պարբերական կոտորակի տեսքով, կամ որ 0,(02) պարբերական կոտորակը $\frac{2}{99}$ թվի տասնորդական վերլուծությունն է: Գրում են.

$$\frac{2}{99} = 0{,}0202... = 0{,}(02):$$

Օրինակ 3: $\frac{143}{45}$ թիվը վերածենք տասնորդական կոտորակի:

$\frac{143}{45}$ կոտորակի համարիչն անկյունով բաժանելով նրա հայտարարին՝ կստանանք

$$\frac{143}{45} = 3{,}1777... = 3{,}1(7):$$

Այս հավասարության աջ մասը կարդացվում է հետևյալ կերպ՝ «երեք ամբողջ մեկ տասնորդական և յոթը պարբերության մեջ»:

Ընդհանրապես, եթե դրական անկրճատելի կոտորակի համարիչն անկյունով բաժանենք նրա հայտարարին, ապա քանորդում կստացվի այդ կոտորակի տասնորդական վերլուծությունը՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակի կամ պարբերական կոտորակի տեսքով:

Դրական պարբերական կոտորակի առջև «–» նշան դնելով՝ կստանանք բացասական պարբերական կոտորակ: Օրինակ՝ $-0,(7) = -\frac{7}{9}$:

$-0,(7)$ պարբերական կոտորակը կլինի $-\frac{7}{9}$ թվի տասնորդական վերլուծությունը:

Վերջավոր տասնորդական կոտորակին աջից անվերջ թվով 0-ներ կցագրելով կամ ամբողջ թվին աջից ստորակետ ու ապա անվերջ թվով 0-ներ կցագրելով՝ ստանում ենք (0) պարբերությամբ անվերջ տասնորդական կոտորակ, որը համարվում է սկզբնական թվի գրառումը պարբերական կոտորակի տեսքով:

Օրինակ՝

$$27 = 27,000... = 27,(0),$$
$$0,354 = 0,354000... = 0,354(0),$$
$$-3,1 = -3,1000... = -3,1(0),$$
$$0 = 0,000... = 0,(0):$$

Հետևապես՝ ***ցանկացած ամբողջ թիվ և ցանկացած վերջավոր տասնորդական կոտորակ կարելի է համարել (0) պարբերությամբ պարբերական կոտորակ:***

Դիտողություն. Հեշտ է համոզվել, որ կոտորակի համարիչը հայտարարի վրա անկյունով բաժանման դեպքում 9 պարբերությամբ տասնորդական կոտորակ չի կարող ստացվել, դրա համար էլ 9 պարբերությամբ տասնորդական կոտորակներ սովորաբար չեն դիտարկում:

Այնուամենայնիվ օգտակար է իմանալ, որ, օրինակ՝

$$0,5(0) = 0,5000.... \text{ և } 0,4(9) = 0,4999...$$

տասնորդական կոտորակները միևնույն՝ $\frac{1}{2}$ ռացիոնալ կոտորակի երկու տարբեր վերլուծություններն են տասնորդական կոտորակի տեսքով: (Այդ մասին ավելի հանգամանալից կնշվի հանրահաշվի հետագա դասընթացում):

Եվ այսպես՝ ***ցանկացած $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ թիվ վերածվում է պարբերական կոտորակի:*** Կարելի է նաև ցույց տալ, ***որ ցանկացած պարբերական կոտորակ ինչ-որ ռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծությունն է:***

267. Անկրճատելի սովորական կոտորակը ո՞ր դեպքում չի վերածվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի:

268. Ո՞ր եղանակով է կարելի ցանկացած սովորական կոտորակը վերածել տասնորդականի:

269. Ինչպիսի՞ տասնորդական կոտորակներ է կարելի ստանալ սովորական կոտորակի համարիչը նրա հայտարարին անկյունով բաժանելու դեպքում:

270. Ինչպե՞ս իմանալ, թե սովորական կոտորակն ինչ տասնորդական կոտորակի կվերածվի՝ վերջավոր, թե՞ անվերջ: Բերե՛ք համապատասխան օրինակներ:

271. Վերջավոր տասնորդական կոտորակը կամ ամբողջ թիվը ինչպե՞ս կարելի է գրառել պարբերական կոտորակի տեսքով: Բերե՛ք օրինակներ:

272. Տրված թիվը գրառեք պարբերական կոտորակի տեսքով, նշեք պարբերությունը.

ա) $\frac{1}{3}$; բ) $\frac{2}{9}$; գ) $\frac{12}{5}$;

դ) 12; ե) $\frac{24}{30}$; զ) $\frac{36}{48}$;

է) $\frac{4}{7}$; ը) $\frac{45}{63}$; թ) $\frac{1}{6}$;

ժ) $\frac{2}{6}$; ի) $\frac{3}{6}$; լ) $\frac{4}{6}$;

խ) $\frac{20}{41}$; ծ) $\frac{15}{37}$; կ) $\frac{5}{21}$:

273. Տրված սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի՝ համարիչը հայտարարին անկյունով բաժանելու եղանակով.

ա) $\frac{1}{9}$; բ) $\frac{2}{9}$; գ) $\frac{3}{9}$; դ) $\frac{4}{9}$:

274. Սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի.

ա) $\frac{5}{9}$; բ) $\frac{6}{9}$; գ) $\frac{7}{9}$; դ) $\frac{8}{9}$:

275. Սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի և նշեք նրա պարբերությունը.

ա) $\frac{12}{99}$; բ) $\frac{23}{99}$; գ) $\frac{34}{99}$; դ) $\frac{45}{99}$:

276. Սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի.

ա) $\frac{56}{99}$; բ) $\frac{67}{99}$; գ) $\frac{78}{99}$; դ) $\frac{89}{99}$:

277. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքներից՝ պարբերական կոտորակը գրառեք սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) 0,(1); բ) 0,(3); գ) 0,(5); դ) 0,(7);
ե) 0,(25); զ) 0,(37); է) 0,(10); ը) 0,(05):

3.2 Անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակներ

Դիտարկենք

0,10110111011110...

դրական անվերջ տասնորդական կոտորակը, որում ստորակետից հետո գրված են՝ 1, 0, երկու հատ 1, 0, երեք հատ 1, 0 և այդպես շարունակ՝ միմյանց հաջորդող ամեն երկու 0-ների արանքում ներառելով մեկով ավելի 1-եր, քան նախորդ արանքում: Թվանշանների ոչ մի խումբ այս կոտորակի համար չի կարող լինել պարբերություն: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ այդ կոտորակն ունի պարբերություն, ապա թվանշանների այդ խումբը (պարբերությունը) պետք է պարունակի գոնե մեկ հատ 0 (այլապես կստացվեր, որ այդ թվի թվանշանները, սկսած մի ինչ որ կարգից, բոլորը 1 են): Սակայն ինչպիսին էլ որ լինի պարբերության երկարությունը (պարբերության մեջ պարունակվող թվանշանների քանակը), այս թվի թվանշանների մեջ կարելի է նշել անթիվ բազմությամբ իրար հաջորդող թվանշանների խմբեր, որոնք բաղկացած են միայն 1-երից: Այս կոտորակը ոչ պարբերական է և հետևապես չի կարող լինել որևիցե ռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծությունը:

Ահա դրական անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակների ևս երկու օրինակ.

0,01001000100001..., 17,123456789101112...:

Առաջին կոտորակում ստորակետից հետո գրված է՝ 0, 1, երկու հատ 0, 1, երեք հատ 0, 1 և այդպես շարունակ: Երկրորդում ստորակետից հետո աճման կարգով գրված են բոլոր բնական թվերը:

Դրական կոտորակի առջև «–» նշան դնելով՝ ստանում ենք բացասական կոտորակ: Օրինակ՝

–0,01001000100001..., –17,123456789101112...

կոտորակները բացասական անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակներ են:

Անվերջ տասնորդական կոտորակներն անվանում են թվեր:

Թիվը, որ կարելի է գրել անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով, անվանում են իռացիոնալ (ոչ ռացիոնալ) թիվ:

Եթե իռացիոնալ թիվը նշանակվում է տառով, օրինակ՝

$$a = 0{,}01001000100001...\ ,$$

ապա ասում են, որ այդ հավասարության աջ մասը a թվի տասնորդական վերլուծությունն է:

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերը միասին անվանում են իրական թվեր:

Յուրաքանչյուր իրական թիվ ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Եթե թիվը ռացիոնալ է, ապա այդ կոտորակը պարբերական է, եթե թիվն իռացիոնալ է, ապա կոտորակը ոչ պարբերական է:

Ինչպես և վերջավոր տասնորդական կոտորակների դեպքում էր, դրական անվերջ տասնորդական կոտորակի՝ մինչև ստորակետը գտնվող թիվը անվանում են այդ ***կոտորակի ամբողջ մաս:***

Անվերջ տասնորդական կոտորակի՝ ստորակետից հետո գտնվող առաջին թվանշանը անվանում են նրա ***առաջին կարգի թվանշան,*** ստորակետից հետո գտնվող երկրորդ թվանշանը՝ ***երկրորդ կարգի թվանշան,*** երրորդը՝ երրորդ կարգի թվանշան և այլն:

Զրոյից տարբեր կամայական անվերջ տասնորդական կոտորակի գրառման համար օգտագործում են տառեր:

Դիցուք տված է դրական անվերջ տասնորդական կոտորակ: Նրա ամբողջ մասը նշանակենք α_0-ով: Պարզ է, որ α_0-ն զրո է կամ բնական թիվ: Առաջին կարգի թվանշանը նշանակենք α_1-ով, երկրորդ կարգի թվանշանը՝ α_2-ով, երրորդ կարգի թվանշանը՝ α_3-ով և այլն: Արդյունքում մեր դրական անվերջ տասնորդական կոտորակը կգրվի այսպես՝

$$\alpha_0, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, ...\, \alpha_n\, ...,$$

ընդ որում α_0 թիվը կամ α_1, α_2, ... թվանշաններից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, այլապես այդ թիվը կլիներ զրո:

Դրական անվերջ տասնորդական կոտորակի առջև դնելով «–» նշան՝ կստանանք բացասական անվերջ տասնորդական կոտորակ՝

$$-\alpha_0, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, ...$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3...$ և $-\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ թվերը (անվերջ տասնորդական կոտորակները) անվանում են իրար ***հակադիր թվեր:***

Եթե իրար հակադիր թվերից մեկը նշանակենք a-ով, ապա մյուսը նշանակում են $-a$-ով:

Եթե a-ն դրական թիվ է, ապա $(-a)$-ն բացասական է, եթե a-ն բացասական թիվ է, ապա $-a$-ն դրական է, իսկ եթե $a = 0$, ապա $-a$-ն նույնպես զրո է՝ $-a = 0$:

a իրական թվի բացարձակ արժեք (կամ մոդուլ) անվանում են հենց իրեն՝ a թիվը, եթե a-ն դրական թիվ է, զրո, եթե a-ն զրո է, $(-a)$ թիվը, եթե a-ն բացասական թիվ է:

a իրական թվի բացարձակ արժեքը նշանակում են $|a|$-ով:

Այսպիսով,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ եթե } a > 0 \\ 0, \text{ եթե } a = 0 \\ -a, \text{ եթե } a < 0 \end{cases}$$

Օրինակ, դիցուք

$$a = 0{,}101101111\ \ldots$$
$$b = -2{,}1234567891011\ldots$$
$$c = 0{,}(0):$$

Այդ դեպքում

$$|a| = 0{,}101101111\ldots$$
$$|b| = 2{,}1234567891011\ldots$$
$$|c| = 0:$$

278. Ո՞ր թիվն են անվանում.
ա) ռացիոնալ, բ) իռացիոնալ, գ) իրական:

279. Ամեն մի ռացիոնալ թիվ իրական թի՞վ է:

280. Գտեք որևիցե հինգ անվերջ ոչ պարբերական կոտորակ (իռացիոնալ թիվ):

281. Գոյություն ունի՞ ռացիոնալ թիվ, որը հավասար լինի անվերջ ոչ պարբերական կոտորակի:

282. Ռացիոնա՞լ, թե՞ իռացիոնալ է հետևյալ թիվը.
ա) 0,275; բ) 0,(2);
գ) 1,32323232...; դ) 1,15 (45);
ե) 3,10110111011110...; զ) 0,123456789101112...:

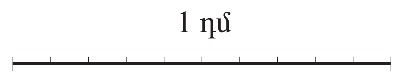
283. Գրեք չորս թիվ, որոնք լինեն.
ա) բնական, բ) դրական,
գ) բացասական, դ) ամբողջ,
ե) ռացիոնալ, զ) իռացիոնալ,

է) զույգ,
ը) կենտ,
թ) պարզ,
ժ) բաղադրյալ,
ի) 3-ի բազմապատիկ,
լ) 2-ի և 5-ի բազմապատիկ:

284. Գրեք երկու թիվ, որոնք լինեն.
ա) ռացիոնալ և բացասական,
բ) ամբողջ և 5-ի բազմապատիկ,
գ) ամբողջ և դրական,
դ) պարզ և 30-ից մեծ,
ե) բաղադրյալ և զույգ,
զ) կենտ և 7-ի բազմապատիկ:

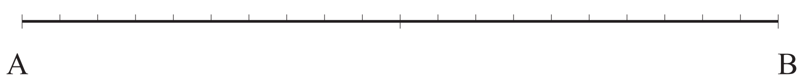
3.3 Հատվածի երկարություն

Դիտարկենք հատվածի երկարության չափման մի քանի օրինակներ: Որպես միավոր հատված (երկարության միավոր) վերցնենք 1 դմ-ը (նկ. 8): Այս կետում բոլոր նկարները կատարված են 1 : 2 մասշտաբով:



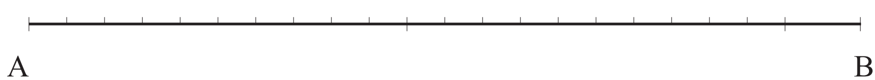
Նկ. 8

Օրինակ 1: Նկար 9-ում պատկերված AB հատվածն ունի 2 դմ երկարություն, այսինքն՝ AB հատվածում տեղավորվում է ճիշտ 2 դմ: Գրում են՝ AB = 2 դմ:



Նկ. 9

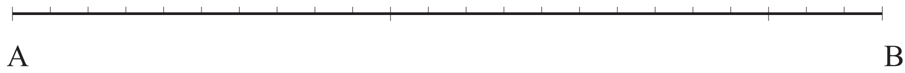
Օրինակ 2: Նկար 10-ում պատկերված AB հատվածում 2 դմ-ը ազատ տեղավորվում է, ու բացի դրանից մնում է 1 դմ-ից փոքր մի հատված: Այս դեպքում ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը մոտավորապես 2 դմ է մինչև 1 դմ ճշտությամբ՝ պակասորդով: Գրում են՝ AB $\approx$ 2 դմ:



Նկ. 10

Օրինակ 3: Նկար 11-ում պատկերված AB հատվածում տեղավորվում է

2 դմ և բացի դրանից մնում է 1 դմ-ից փոքր մի հատված, որում տեղավորվում է ճիշտ 3 սմ: Այս դեպքում գրում են՝ AB = 2,3 դմ:



Նկ. 11

Օրինակ 4: Նկար 12-ում պատկերված AB հատվածում տեղավորվում է 2 դմ և մնում է 1 դմ-ից փոքր հատված, որում տեղավորվում է 3 սմ և մնում է ևս 1 սմ-ից փոքր հատված: Այս դեպքում AB հատվածի երկարությունը մոտավորապես 2,3 դմ է մինչև 0,1 դմ ճշտությամբ՝ պակասորդով:
Գրում են՝ AB ≈ 2,3 դմ:

Նկ. 12

Օրինակ 5: Եթե օրինակ 12-ում վերջում մնացած 1 սմ-ից փոքր հատվածում տեղավորվում է ճիշտ 4 մմ, ապա գրում են՝ AB = 2,34 դմ:

Օրինակ 6: Եթե օրինակ 12-ում վերջում մնացած 1 սմ-ից փոքր հատվածում 4 մմ տեղավորելուց հետո մնում է ևս 1 մմ-ից փոքր հատված,ապա ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը մոտավորապես 2,34 դմ է մինչև 0,01 դմ ճշտությամբ՝ պակասորդով: Գրում են՝ AB ≈ 2,34 դմ:

1-6 օրինակներում նկարագրված եղանակով հատվածների երկարությունները կարելի է չափել նաև երկարության ցանկացած այլ միավորով. 1 սմ, 1 մ, 1 կմ, ...:

Օրինակ 7: Եթե երկարության տրված միավորով AB հատվածի երկարության չափման արդյունքում ստացվել է 0,2305, ապա դա նշանակում է, որ այդ երկարությունը փոքր է միավոր հատվածի (երկարության միավորի) երկարությունից, AB հատվածում տեղավորվում է 0,2 միավոր, մնացած հատվածում տեղավորվում է 0,03 միավոր, և մնում է մի հատված, որում տեղավորվում է ճիշտ 0,005 միավոր:

Եթե ընտրված միավորով տրված AB հատվածի երկարության չափման ընթացքում նրա տասնորդական, հարյուրերորդական, հազարերորդական և այլ բաժինները ստանալու փուլից հետո դեռևս ավելորդ հատված է մնում, ապա AB հատվածի երկարությունը վերջավոր տասնորդական կոտորակով միայն մոտավորապես կարտահայտվի: Իսկ ճշգրիտ՝ AB հատվածի երկարությունն այս դեպքում կարտահայտվի անվերջ տասնորդական կոտորակով՝

$$AB = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6...:$$

Այստեղ α_0-ն AB-ի մոտավոր երկարությունն է մինչև 1 միավոր ճշտությամբ՝ պակասորդով: α_0, α_1-ն AB-ի մոտավոր երկարությունն է մինչև 0,1 ճշտությամբ՝ պակասորդով: α_0, $\alpha_1\alpha_2$-ն AB-ի մոտավոր երկարությունն է մինչև 0,01 ճշտությամբ՝ պակասորդով: Այս գործընթացը կարելի է շարունակել:

Օրինակ 8: Եթե AB = 3,(07) = 3,070707..., ապա AB հատվածի մոտավոր երկարությունը հավասար է.

3 մինչև 1 ճշտությամբ՝ պակասորդով,
3,0 մինչև 0,1 ճշտությամբ՝ պակասորդով,
3,07 մինչև 0,01 ճշտությամբ՝ պակասորդով,
3,070 մինչև 0,001 ճշտությամբ՝ պակասորդով և այդպես շարունակ:

Քանի որ

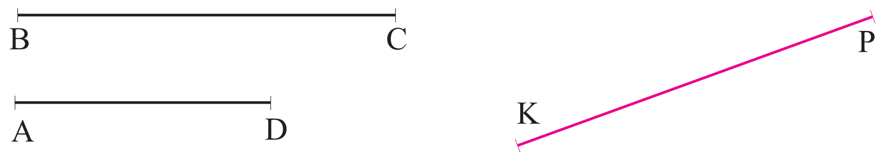
$$3,(07) = 3\,\frac{7}{99},$$

ապա 3,(07) թիվն այն հատվածի երկարությունն է, որում տեղավորվում է 3 միավոր (3 միավոր հատված) և ևս $\frac{7}{99}$ միավոր:

Սակայն սովորական չափիչ սարքերը հարմարեցված են հաշվարկի տասական համակարգին. երկարության միավորը բաժանվում է 10, 100,1000, ... հավասար մասերի: Դրա համար էլ տրված երկարության հատվածը, օրինակ, քանոնի միջոցով գծելու համար օգտվում են նրա՝ տասնորդական կոտորակով արտահայտված մոտավոր երկարությունից: Այսպես, օրինակ, 8-ի դեպքում կարելի էր վերցնել AB ≈ 3,07:

Դիտողություն. Ավելի վաղ արդեն մտցվել էր հատվածի երկարության գաղափարը, բայց միայն այն դեպքում, երբ այդ երկարությունն արտահայտվում է ռացիոնալ թվով: Այս կետում տրվեց կամայական հատվածի երկարության գաղափարը. այդ երկարությունը կարող է արտահայտվել ինչպես ռացիոնալ, այնպես էլ իռացիոնալ թվով: Ամփոփելով արդյունքները՝ կարելի է ասել, որ կամայական AB հատված ունի երկարություն՝ արտահայտված որևէ դրական *a* թվով: Ճշմարիտ է նաև հակառակ պնդումը. յուրաքանչյուր *a* դրական թվի համար կարելի է նշել AB հատված, որի երկարությունը *a* է:

285. Նկար 13-ում պատկերված են BC, AD, KP հատվածները: Աչքաչափով որոշեք յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը սանտիմետրերով: Քանոնի օգնությամբ ստուգեք ձեր աչքաչափը:



Նկ. 13

286. Տետրում գծեք երեք կամայական հատված և կատարեք նախորդ առաջադրանքի պահանջները:

287. Տետրում գծեք 3,5 սմ, 5 սմ և 6,5 սմ երկարություններով երեք հատված: Յուրաքանչյուր հատվածն աչքաչափով բաժանեք երեք հավասար մասերի: Քանոնի օգնությամբ ստուգեք ձեր աչքաչափը:

288. Կառուցեք 8,5 սմ երկարությամբ հատված: Աչքաչափով տրոհեք այդ հատվածը 5 հավասար մասերի, 6 հավասար մասերի:

289. Նկար 14-ում պատկերված են AB և CD հատվածները: Որպես չափման միավոր ընդունելով CD հատվածը՝ աչքաչափով մինչև 1 ճշտությամբ պակասորդով որոշեք AB հատվածի երկարությունը: Ստուգեք ձեր աչքաչափը կարկինի օգնությամբ:

Նկ. 14

290. AB հատվածի երկարությունն արտահայտվում է 5,375 թվով: Գրեք AB հատվածի մոտավոր երկարությունը պակասորդով մինչև 1, մինչև 0,1,մինչև 0,01 ճշտությամբ:

291. AB հատվածի երկարությունը հավասար է.
ա) $3\frac{1}{8}$; բ) $2\frac{5}{16}$; գ) $3\frac{61}{99}$; դ) $4\frac{14}{27}$:
AB հատվածի երկարությունն արտահայտեք տասնորդական կոտորակով մինչև 1, մինչև 0,1, մինչև 0,01 ճշտությամբ՝ պակասորդով:

292. AB հատվածի երկարությունը $3\frac{19}{99}$ է: Պակասորդով արտահայտեք այդ երկարությունը տասնորդական կոտորակով նշված ճշտությամբ.
ա) 0,1, բ) 0,01, գ) 0,001, դ) 0,0001:

3.4 Գաղափար իրական թվերի համեմատման և դրանց հետ թվաբանական գործողություններ կատարելու մասին

Դիցուք տրված են երկու անվերջ տասնորդական կոտորակներ (կիամա-ընենք, որ նրանց պարբերությունը 9-ը չէ):

Անվերջ տասնորդական կոտորակները համեմատելիս ղեկավարվում են հետևյալ կանոններով.

Կանոն 1. ***Երկու անվերջ տասնորդական կոտորակներ (այսինքն իրական թվեր) իրար հավասար են, եթե նրանք ունեն նույն նշանը, և նրանց բացարձակ արժեքները ունեն նույն ամբողջ մասերը և համապատասխան կարգերում նույն թվանշանները:***

Մնացած դեպքերում անվերջ տասնորդական կոտորակները համարվում են իրարից տարբեր (ոչ հավասար):

Այս կանոնից միակ բացառությունն է 0 թիվը, որը չի փոխվում, եթե նրա առջև դնենք «–» կամ «+» նշանը՝

$$0 = 0{,}000\ldots = -\,0{,}000\ldots = +\,0{,}000\ldots$$

Կանոն 2. ***Բացասական անվերջ տասնորդական կոտորակը փոքր է 0-ից և փոքր է ցանկացած դրական անվերջ տասնորդական կոտորակից: 0 թիվը փոքր է ցանկացած դրական տասնորդական կոտորակից:***

Կանոն 3. ***Եթե երկու դրական տասնորդական կոտորակների ամբողջ մասերը իրարից տարբեր են, ապա այն կոտորակն է մեծ, որի ամբողջ մասը մեծ է: Իսկ եթե ամբողջ մասերը իրար հավասար են, ապա դիտարկվում են ստորակետից հետո այն ամենափոքր կարգը, որտեղ այդ թվերի թվանշանները իրարից տարբեր են, և այն կոտորակն են համարում մեծ, որի այդ կարգում գրված թվանշանը մեծ է:***

Երկու բացասական տասնորդական կոտորակներից մեծը այն է, որի բացարձակ արժեքը ավելի փոքր է:

Եթե a և b իրական թվերը (անվերջ տասնորդական կոտորակները) իրար հավասար են, ապա գրում են՝ $a = b$: Եթե a-ն փոքր է b-ից, գրում են՝ $a < b$ կամ $b > a$: Վերջապես, եթե a-ն հավասար չէ b, ապա գրում են՝ $a \neq b$:

Օրինակ: Համեմատենք $-3{,}1$ և $-3(1)$ թվերը:

Քանի որ $|-3{,}1| = 3{,}1 = 3{,}1000\ldots$, $|-3{,}(1)| = 3{,}(1) = 3{,}111\ldots.$, ապա $-3{,}1$ և $-3(1)$

թվերի մոդուլները ունեն միևնույն ամբողջ մասը՝ 3: Այդ թվերի՝ ստորակետից հետո առաջին կարգերի թվանշանները նույնպես իրար հավասար են (1 են), սակայն առաջին կոտորակի երկրորդ կարգի թվանշանը՝ 0-ն, փոքր է երկրորդ կոտորակի երկրորդ կարգի թվանշանից՝ 1-ից, ուստի առաջին կոտորակի մոդուլը փոքր է երկրորդ կոտորակի մոդուլից՝ 3,1 < 3,(1): Քանի որ այդ կոտորակները բացասական են, ապա, ըստ համեմատման կանոնի, ստացվում է, որ

$$–3,1 > –3(1):$$

Անվերջ տասնորդական կոտորակների գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման կանոններն ավելի բարդ են, քան վերջավոր տասնորդական կոտորակների համապատասխան կանոնները. այդ կանոնների խիստ հիմնավորումները տրվում են բուհերում դասավանդվող «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի դասընթացում, և, բնականաբար, դրանց ճշգրիտ ձևակերպումները այստեղ մենք չենք բերում: Մենք ուղղակի կհամարենք, որ կամայական երկու իրական թվերի գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը (եթե բաժանարարը զրո չէ) իրական թիվ է, ընդ որում միակը: Գործնականում անվերջ տասնորդական կոտորակների (այսինքն իրական թվերի) հետ թվաբանական գործողությունները կատարում են մոտավոր, ճիշտ այնպես, ինչպես վարվում են երկու վերջավոր տասնորդական կոտորակների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը մոտավորապես հաշվելիս (այդ եղանակին դուք ծանոթ եք 6-րդ դասարանի «Մաթեմատիկա» առարկայի դասընթացից):

Անվերջ տասնորդական կոտորակներով տրվող իրական թվերը նույնպես մոտարկում են վերջավոր տասնորդական կոտորակներով: Հենց անվերջ տասնորդական կոտորակի գրառման եղանակը հուշում է, թե ինչպես այդ մոտարկումները պետք է ընտրել: Դիտարկենք օրինակ:

Դիցուք A = 2,3(28) = 2,3282828...

Եթե այս կոտորակի գրառումն ընդհատենք ստորակետից հետո երկրորդ կարգի թվանշանի վրա, ապա կստանանք 2,32 թիվը, որը, ըստ իրական թվերի համեմատման վերը նշված կանոն 3-ի, փոքր է a-ից:

Եթե 2,32-ի հարյուրերորդականների թվանշանն ավելացնենք 1-ով, ապա կստանանք 2,33 թիվը, որը մեծ է a-ից (ըստ կանոն 3-ի):

Այսպիսով 2,32 < a < 2,33,

ուրեմն 2,32-ը a-ի մոտարկումն է ներքևից, իսկ 2,33-ը՝ վերևից, ընդ որում գրում են՝ $a \approx 2,32$, $a \approx 2,33$ և ասում՝

«2,32-ը *a* ***թվի մոտարկումն է մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ պակասորդով (ներքևից), 2,33-ը*** *a* ***թվի մոտարկումն է մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ հավելուրդով (վերևից)»:***

«Մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ» բառերի փոխարեն նաև ասում են «ստորակետից հետո երկրորդ կարգի միավորի ճշտությամբ»:

Քանի որ a թվի գրելաձևում ստորակետից հետո երրորդ թվանշանը մեծ է

5-ից, ապա a-ն ավելի մոտ է 2,33-ին, քան 2,32-ին: Այդ պատճառով ասում են, որ 2,33-ը a-ի մոտարկումն է մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ՝ կլորացումով:

Նույն կերպ դատելով՝ կստանանք, որ

$$2{,}328 < a < 2{,}329,$$

$$a \approx 2{,}328,\ a \approx 2{,}329,$$

որտեղ 2,328-ը a-ի մոտարկումն է մեկ հազարերորդականի ճշտությամբ-ներքևից և միևնույն ժամանակ՝ կլորացումով: Դա հետևում է նրանից, որ a թվի գրելաձևում ստորակետից հետո չորրորդ կարգի թվանշանը 5-ից փոքր է, այդ պատճառով a-ն 2,328-ին ավելի է մոտ, քան 2,329-ին:

2,329-ը a-ի մոտարկումն է 0,001 ճշտությամբ վերևից:

Հանգունորեն $2{,}3282 < a < 2{,}3283$: Այժմ a-ն վերևից և ներքևից մոտարկումների ճիշտ մեջտեղում է: Այսպիսի դեպքում 2,3283-ն է ընդունվում որպես a թվի մոտարկում 0,0001 ճշտությամբ՝ կլորացումով:

Նման եղանակով $b = -2{,}32829$-ի համար ճիշտ են $-2{,}33 < b < -2{,}32$ անհավասարությունները, որտեղից $b \approx -2{,}33$ և $b \approx -2{,}32$, ընդ որում $-2{,}33$-ը b թվի մոտարկումն է 0,01 ճշտությամբ ներքևից և միաժամանակ՝կլորացումով: Իսկ $-2{,}32$-ը b թվի մոտարկումն է 0,01 ճշտությամբ վերևից:

Մտցնենք տասնորդական կոտորակի ***նշանակալից թվանշանի*** գաղափարը:

Տասնորդական կոտորակի նշանակալից թվանշան են անվանում նրա (ձախից աջ) առաջին զրոյից տարբեր թվանշանը, ինչպես նաև հաջորդ բոլոր թվանշաններից յուրաքանչյուրը:

Օրինակներ՝

235 000 թվի բոլոր թվանշանները նշանակալից են,

0,(302) թվի գրառման մեջ նշանակալից են ստորակետից հետո գրված բոլոր թվանշանները,

0,003004 թվում նշանակալից են 3 թվանշանից սկսած բոլորը:

0,101101110... թվի գրառման մեջ նշանակալից են ստորակետից հետո գրված բոլոր թվանշանները:

Կլորացնել թիվը, օրինակ, մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ՝ նշանակում է կլորացնել այն մինչև այն կարգը, որում գտնվում է այդ թվանշանը՝ հաջորդ թվանշանները փոխարինելով զրոներով: Ստորև բերված կլորացումները կատարված են մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը.

$$3{,}7523 \approx 3{,}7500 = 3{,}75;$$

$$-0{,}010278 \approx -0{,}010300 = -0{,}0103;$$

$$0{,}035021 \text{ և } 0{,}035000 = 0{,}0350;$$

$1,(73) = 1,7373... \approx 1,74;$
$-0,02339 \approx -0,0234;$
$2\ 365\ 780 \approx 2\ 370\ 000 = 2,37 \cdot 10^6;$
$2\ 35\ 000 \approx 235\ 000 = 2,35 \cdot 10^5$:

Թվերը պատշաճ ձևով մոտավորապես գումարելու, հանելու, բազմապատկելու և բաժանելու համար պետք է նախապես նրանք ճիշտ կլորացնել: Ինչպես դա անել՝ կպարզաբանենք տասնորդական կոտորակի տեսքով գրված թվերի համար:

Երկու թվերի գումարը (կամ տարբերությունը) մոտավորապես հաշվելու համար այդ թվերը կլորացնում են նույն ճշտությամբ, օրինակ մեկ հարյուրերորդականի, ապա գումարում են (կամ հանում) ստացված մոտավորությունները:

Օրինակ 1: $a = 23,1834(567)$ և $b = -4,2375101101110...$ թվերը նախապես կլորացնելով մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ՝ մոտավորապես հաշվենք նրանց գումարն ու տարբերությունը:

Լուծում: Կլորացնելով այդ թվերը մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ՝ կստանանք, որ $a \approx 23,18$, $b \approx -4,24$: Այստեղից էլ կգտնենք պատասխանը.

$a + b \approx 18,94$; $a - b \approx 27,42$:

Համանման ձևով են վարվում նաև այն դեպքերում, երբ հանման և գումարման գործողությունները պետք է կատարել՝ կլորացնելով մինչև մեկ տասնորդական, մինչև մեկ հազարերորդական, մինչև մեկ տասնյակ, մինչև մեկ հազար և այլն ճշտությամբ:

Ստորև կձևակերպենք մինչև որևէ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ կլորացումով մոտավոր բազմապատկման ու բաժանման կանոնը:

Երկու թվերի արտադրյալը (կամ երկու թվերի քանորդը) մոտավոր հաշվելու համար նախ պետք է այդ թվերը կլորացնել մինչև միևնույն նշանակալից թվանշանի (օրինակ՝ մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի) ճշտությամբ, բազմապատկել (կամ բաժանել) ստացված մոտավորությունները և արդյունքը կլորացնել մինչև այդ նույն (երրորդ) նշանակալից թվանշանը:

Օրինակ 2: Դիցուք $a = 135,78665$, $b = 0,00687(51)$:

Կլորացնելով մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը՝ մոտավորապես հաշվենք $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ արտահայտությունները:

Լուծում: Կլորացնելով մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը՝ կունենանք.

$$a \approx 136,\ b \approx 0{,}00688:$$

Այդ դեպքում.

$$a \cdot b \approx 136 \cdot 0{,}00688 = 0{,}93568 \approx 0{,}936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0{,}00688} = \frac{13600000}{688} = 19767{,}4... \approx 19800;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0{,}00688}{136} = 0{,}00005058... \approx 0{,}0000506:$$

Պատասխան՝ $a \cdot b \approx 0{,}936;\ \frac{a}{b} \approx 19800;\ \frac{b}{a} \approx 0{,}0000506:$

Դիտողություն: Մեծ ճշտությունը պահանջում է մեծ քանակությամբ թվանշանների օգտագործում, փոքր ճշտության համար բավական են նաև քիչ քանակությամբ թվանշանները:

Որքան մեծ թվով թվանշաններով վերցնենք երկու թվերի մոտարկումները, այնքան մոտարկումների գումարը (տարբերությունը, արտադրյալը,քանորդը) մոտ կլինի այդ երկու թվերի գումարին (տարբերությանը, արտադրյալին, քանորդին):

Օրինակ, ենթադրենք տրված է $a = 1{,}44(5)$ թիվը, և պահանջվում է հաշվել նրա քառակուսին: Եթե նախ այդ թիվը, ապա նաև նրա մոտարկման քառակուսին կլորացնենք մինչև առաջին նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ, կստանանք $a^2 \approx 1 \cdot 1 = 1$, որը ճշգրիտ արդյունքից տարբերվում է
$2{,}088025 - 1 = 1{,}088025$ թվով:

Եթե a թիվն ու նրա մոտարկման քառակուսին կլորացնենք մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ, ապա կստանանք $a^2 \approx 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \approx 2{,}0$, որը ճշգրիտ արդյունքից տարբերվում է $2{,}088025 - 2 = 0{,}088025$ թվով:

Իսկ եթե թիվն ու նրա մոտարկման քառակուսին կլորացնենք մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ, ապա կստացվի

$$a^2 \approx 1{,}45 \cdot 1{,}45 = 2{,}1025 \approx 2{,}10,$$

որը ճշգրիտ արդյունքից կտարբերվի ընդամենը $2{,}088025 - 2{,}10 \approx 0{,}0120$-ով:

Նշենք իրական թվերի այն հատկությունները, որոնք արտահայտվում են հավասարություններով:

Ցանկացած a,b և c իրական թվերի համար ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

1) $a + b = b + a$ (գումարման տեղափոխելիության օրենքը),
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (գումարման զուգորդական օրենքը),
3) $a \cdot \mathrm{b} = b \cdot a$ (բազմապատկման տեղափոխելիության օրենքը),
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (բազմապատկման զուգորդական օրենքը),
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (բաշխական օրենքը),

6) $a + 0 = a$,

7) $a + (-a) = 0$,

8) $a - b = a + (-b)$,

9) $a \cdot 1 = a$,

10) $a \cdot 0 = 0$,

11) $-a = (-1) \cdot a$,

12) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (եթե $a \neq 0$), $\left(\frac{1}{a}\right.$-ն կոչվում է a թվի հակադարձ$\left.\right)$

13) $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ (եթե $b \neq 0$):

293. Ի՞նչ է նշանակում «≈» նշանը: Ինչպե՞ս են կարդում $a \approx a_1$ գրությունը:

294. Նշե՛ք 0,2638 թվի մոտարկումը:
ա) մեկ տասնորդականի ճշտությամբ պակասորդով,
բ) մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ հավելուրդով,
գ) մեկ հազարերորդականի ճշտությամբ կլորացումով:

295. Թվի տասնորդական տեսքով գրառման մեջ ո՞ր թվանշաններն են անվանում նշանակալից:

296. Ի՞նչ է նշանակում թիվը կլորացնել մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ:

297. Գտե՛ք a թվի մոտարկումը պակասորդով՝ ստորակետից հետո երկրորդ կարգի 1 միավորի ճշտությամբ, եթե.
ա) $a = 0{,}3456$; բ) $a = 0{,}76543$;
գ) $a = 0{,}02325$; դ) $a = -0{,}34354$:

298. Գտե՛ք a թվի մոտարկումը հավելուրդով՝ ստորակետից հետո երկրորդ կարգի 1 միավորի ճշտությամբ, եթե.
ա) $a = 1{,}2345$; բ) $a = 3{,}56789$; գ) $a = 2{,}577$; դ) $a = 2{,}555$:

299. a թիվը կլորացրե՛ք 0,01 ճշտությամբ, եթե.
ա) $a = 1{,}24851$; բ) $a = 1{,}24158$;
գ) $a = -7{,}02303$; դ) $a = 0{,}12528$:

300. a թիվը կլորացրեք 0,001 ճշտությամբ, եթե.
ա) $a = 8{,}91011...$;   բ) $a = -8{,}91011...$;
գ) $a = 0{,}2626$;   դ) $a = 0{,}6265$:

301. Ընդգծեք տրված թվի նշանակալից թվանշանները.
ա) 3,52;   բ) 0,352;   գ) 0,03520;   դ) 7,405;
ե) 4,203;   զ) 0,005;   է) 0,0420;   ը) 7,0003;
թ) 10,0050;   ժ) 6,700;   ի) 0,00067;   լ) 0,0100:

302. 1995, 1996 թիվը կլորացրեք մինչև
ա) մեկ տասնորդական,   բ) մեկ հարյուրերորդական,
գ) մեկ հազարերորդական,   դ) մեկ միավոր,
ե) մեկ տասնյակ,   զ) մեկ հարյուրյակ:

303. 1039, 930(1) թիվը կլորացրեք մինչև յոթերորդ, վեցերորդ, հինգերորդ, չորրորդ, երրորդ նշանակալից թվանշանը:

304. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր գումարման կանոնը մինչև մեկ հազարերորդականի ճշտությամբ կլորացման համար:

305. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր հանման կանոնը մինչև մեկ տասնորդականի ճշտությամբ կլորացման համար:

306. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր բազմապատկման կանոնը մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ կլորացման համար:

307. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր բաժանման կանոնը մինչև չորրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ կլորացման համար:

308. Մինչև 0,1 ճշտությամբ կլորացրեք a ու b թվերը և հաշվեք նրանց մոտավոր գումարն ու մոտավոր տարբերությունը, եթե.
ա) $a = 3{,}28$, $b = 0{,}11$;   բ) $a = -1{,}256$, $b = 2{,}555$;
գ) $a = 0{,}010010$, $b = 0{,}2$;   դ) $a = 2{,}7235$, $b = -3{,}42426$;
ե) $a = -7{,}17$, $b = -0{,}33$;   զ) $0{,}100100010... + 0{,}238$;
է) $2{,}7(3) + 3{,}(42)$:

309. Մինչև 0,01 ճշտությամբ կլորացրեք a ու b թվերը և հաշվե՛ք նրանց մոտավոր գումարն ու տարբերությունը, եթե.

ա) $a = 1{,}4545$, $b = -1{,}203$;
բ) $a = 2{,}1264$, $b = -3{,}1145$;
գ) $a = -5{,}777$, $b = 2{,}536$;
դ) $a = 0{,}5642$, $b = -3{,}573$;
ե) $a = -12{,}454$, $b = -10{,}111$;
զ) $7 - 0{,}(3)$;
է) $1{,}(45) - 1{,}2$;
ը) $2{,}1264 - 3{,}(1)$;
թ) $5{,}(7) - 2{,}(5)$:

310. Մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ կլորացնելով a ու b թվերը՝ մոտավոր հաշվեք նրանց արտադրյալը և $a : b$ քանորդը, եթե.

ա) $a = -2{,}435$, $b = 1{,}923$;
բ) $a = 2{,}1456$, $b = 0{,}78788$;
գ) $a = -2{,}131$, $b = -0{,}009293$;
դ) $a = 0{,}03531$, $b = 357{,}693$;
ե) $a = 0{,}56$, $b = 0{,}(3)$;
զ) $a = 0{,}(1)$, $b = 0{,}(2)$;
է) $a = 12{,}(45)$, $b = 10{,}(1)$:

311. Մոտավոր հաշվեք արտադրյալը և $a : b$ քանորդը մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ կլորացումով, եթե.

ա) $a = 0{,}253$, $b = 0{,}75$;
բ) $a = 3{,}5781$, $b = -0{,}00494$;
գ) $a = -0{,}045$, $b = -0{,}593$;
դ) $a = 382{,}231$, $b = 0{,}002434$;
ե) $a = 0{,}(2)$, $b = 2$;
զ) $a = 4{,}(2)$, $b = 1{,}(3)$;
է) $a = 45{,}6(12)$, $b = 10{,}(2)$:

312. Ո՞ր դեպքում են երկու a և b իրական թվեր իրար հավասար՝ ($a = b$):

313. Ո՞ր դեպքում երկու a և b իրական թվեր իրար հավասար չեն՝ ($a \neq b$):

314. Ձևակերպեք իրական թվի և զրոյի համեմատման կանոնը:

315. Ինչպե՞ս են համեմատում՝

ա) դրական իրական թվերը,
բ) բացասական իրական թվերը:

316. Դիցուք $|a| = |b|$. Ո՞ր դեպքում $a \neq b$:

317. Ո՞ր դեպքում՝

ա) եթե $a > b$, ապա $|a| > |b|$;
բ) եթե $a > b$, ապա $|a| < |b|$:

318. Կարո՞ղ է արդյոք թիվը

ա) մեծ լինել իր բացարձակ արժեքից,
բ) հավասար լինել իր բացարձակ արժեքին,

գ) փոքր լինել իր բացարձակ արժեքից:
Եթե այո, ապա բերեք օրինակներ:

319. Չկատարելով բոլոր հաշվարկները՝ բացատրեք, թե ինչո՞ւ է ճիշտ հավասարությունը՝

ա) $0 \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right) < 3,(4) \cdot 5,1$;
բ) $(-12,98) \cdot 0 > 5,(8) \cdot (-4,6)$;
գ) $2,(5) \cdot \left(-2\frac{1}{13}\right) < 3,(4) \cdot 5,(1)$;
դ) $(5,(6) - 5,(6)) \cdot > -6,7 \cdot 8,9$;
ե) $(-3,(7) + 3,(7)) \cdot 8,98 < -8,1 \cdot \left(-4\frac{1}{7}\right)$:

320. Ցույց տվեք կրկնակի անհավասարության ստույգությունը՝
ա) $0,75757 < 0,(75) < 0,75758$;
բ) $3,023023 < 3,(023) < 3,023024$:

Համեմատեք թվերը (321-322).

321. ա) 2,42424242... և –2,42424242...;
բ) 0 և –10,(4);
գ) 5,4444444... և 5,5444444...;
դ) 0,1(1) և 0,(2);
ե) 0,333333 և $\frac{1}{3}$;
զ) $\frac{1}{9}$ և 0,(1);
է) –4,313131... և –4,31311311131...;
ը) 0,(27) և $\frac{3}{10}$:

322. ա) 5 և 5,(1);
բ) 0,(23) և 0,234;
գ) 1,2456 և 1,24563;
դ) 1,2456 և 1,(3);
ե) 0,545454 և0,(54);
զ) 0,(4) և 0,(45):

323. Թվերը դասավորեք աճման կարգով՝
ա) –0,142536, –2,(7), 0,125, 0,1(25);
բ) 1,(5), 0,(12), –2(778):

324. Թվերը դասավորեք նվազման կարգով՝
$\frac{1}{9}$; –4,7(5); 0,1115; –4,7556; $\frac{1}{8}$; 0,124:

325. Ճի՞շտ է արդյոք կրկնակի անհավասարությունը՝
ա) $106,727272 \leqslant 106,(72) < 106,727273$;
բ) $-0,313132 < -0,(31) \leqslant -0,313131$:

326. 2,(1) և 2,111 թվերի համար նշեք գոնե մի թիվ, որը նրանցից մեկից մեծ է, իսկ մյուսից՝ փոքր։

327. a և b թվերը բացասական են, և $|a| < |b|$։ Համեմատեք թվերը՝
ա) a և 0; բ) $-b$ և 0; գ) $-b$ և a;
դ) b և $-a$; ե) $-b$ և $-a$; զ) a և $|b|$։

328. Կպահպանվի արդյո՞ք անհավասարության նշանը, եթե նրա երկու մասերը բազմապատկենք բացասական թվով կամ զրոյով։ Բերեք օրինակներ։

329. Նշեք մի որևէ թիվ, որը գտնվում է տված a և b թվերի միջև՝
ա) $a = 2{,}3$; $b = 2{,}4$; բ) $a = 3{,}2$; $b = 3{,}(2)$;
գ) $a = -3{,}15$; $b = -3{,}14$; դ) $a = -5{,}(3)$; $b = -5{,}(21)$։

330. Ինչ որ մեկը մտածեց մի թիվ, որը մեծ է a-ից, բայց փոքր է b-ից։ Ճի՞շտ է արդյոք, որ $a < b$։

Ճի՞շտ է արդյոք անհավասարությունը (331-332).

331. ա) $3{,}5 + 2{,}729 < 3{,}6 + 2{,}729$; բ) $-3{,}21 + 0{,}(4) < -3 + 0{,}(4)$;
գ) $-5{,}6 + 3{,}2 < -5{,}1 + 3{,}(2)$; դ) $5 + 0{,}1 < 5{,}1 + 0{,}10110111...$։

332. ա) $3{,}7 \cdot 0{,}8 < 3{,}8 \cdot 0{,}8$; բ) $-5{,}1 \cdot 0{,}(3) < -5 \cdot 0{,}(3)$;
գ) $-4{,}7(1) \cdot 0{,}5 < -4{,}7 \cdot 0{,}5$; դ) $-3{,}(8) \cdot 0{,}5 < -3{,}8 \cdot 0{,}(5)$։

333. Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը՝
ա) $3\frac{1}{3} + 0{,}(2) = 0{,}(2) + 3\frac{1}{3}$;
բ) $(-5{,}1\ 3{,}(3)) + 7 = -5{,}1 + (3{,}(3) + 7)$;
գ) $(-5{,}4 \cdot (-7)) \cdot 2 = -5{,}4 \cdot ((-7) \cdot 2)$։

334. Հաշվեք (334-335).
ա) $3{,}(27) \cdot 5 - 3{,}(27) \cdot 4$; բ) $5{,}(21) \cdot 7 + 5{,}(21) \cdot 3$;
գ) $3{,}(5) \cdot 7{,}3 - 7{,}3 \cdot 3{,}(5)$; դ) $2{,}(7) \cdot 5{,}41 - 5{,}41 \cdot 2{,}(7)$;
ե) $13{,}(13) - 13{,}(13)$; զ) $-1 \cdot 3{,}(51)$;
է) $0 \cdot 5{,}1234567...$; ը) $1 \cdot (-5{,}1234567...)$;
թ) $1 \cdot \frac{17}{19}$; ժ) $3 \cdot \frac{1}{3}$;

ի) $-3{,}4 \cdot \frac{1}{-3{,}4}$; լ) $-5 \cdot \frac{1}{8}$;

խ) 11,101101110... + (–11,101101110...):

335. ա) (3,2 + (–1,7)) + 1,7; բ) (5,9 + (–0,(7))) + 0,(7);

գ) $(5{,}4 \cdot 1{,}7) \cdot \frac{1}{1{,}7}$; դ) $(-2{,}(95) \cdot 5{,}28) \cdot \frac{1}{5{,}28}$:

336. Գտեք *a* թվի մոտարկումը պակասորդով՝

ա) *a* = 0,(2) 0, 001 ճշտությամբ,

բ) *a* = 1,1234567891011... 0,01 ճշտությամբ

գ) *a* = 12,0(1) 0,1 ճշտությամբ:

337. Գտեք *a* թվի մոտարկումը հավելուրդով՝

ա) *a* = –0(3) ստորակետից հետո երրորդ կարգի 1 միավորի ճշտությամբ

բ) *a* = –1,2777 ստորակետից հետո երկրորդ կարգի 1 միավորի ճշտությամբ

գ) *a* = –12,0(01) թիվը ստորակետից հետո առաջին կարգի 1 միավորի ճշտությամբ:

338. Թիվը կլորացրեք 0,01 ճշտությամբ.

ա) 127,(023); բ) 0,1(27);

գ) –1,34(8); դ) –0,56789101112...:

339. Տված թվերը կլորացնելով 0,1 ճշտությամբ՝ գտեք նրանց մոտավոր գումարը.

ա) 3,288 + 0,123; բ) –1,236 + 2,555;

գ) 0,100100010... + 0,238; դ) 2,7(3) + 3,(42):

340. Տված թվերը կլորացնելով 0,1 ճշտությամբ՝ գտեք նրանց մոտավոր տարբերությունը.

ա) 1,4545 – 1,238; բ) 2,1641 – 3,1145;

գ) 7 – 0,(3); դ) 1,(45) – 1,2;

ե) 2,1264 – 3,(1); զ) 5,(7) – 2,(56):

341. Կատարեք 354-355 առաջադրանքները՝ կլորացնելով նրանցում տրված թվերը մինչև 0,001 ճշտությամբ:

342. Կլորացնելով տրված թվերը մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանը՝ հաշվեք նրանց մոտավոր արտադրյալը.

ա) $2{,}35 \cdot 3{,}251$;   բ) $-4{,}3205 \cdot 2{,}503$;
գ) $3 \cdot 2{,}(1)$;   դ) $0{,}56 \cdot 0{,}(3)$;
ե) $0{,}(1) \cdot 0{,}(2)$;   զ) $12{,}(45) \cdot 10{,}(1)$:

343. Կլորացնելով տրված թվերը մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանը՝ հաշվեք նրանց մոտավոր քանորդը.

ա) $3{,}57 : 0{,}259$;   բ) $-3{,}28 : 40{,}12$;
գ) $12 : 0{,}(1)$;   դ) $0{,}(2) : 2$;
ե) $4{,}(2) : 1{,}(3)$;   զ) $45{,}6(12) : 10{,}(2)$:

344. Կատարեք 158-159 առաջադրանքները՝ կլորացնելով նրանցում տրված թվերը մինչև երրորդ նշանակալից թիվը:

345. Տված են $a = 5{,}(1)$ և $b = 2{,}123456...$ թվերը: $a + b$ թիվը գտնվում է $5 + 2 = 7$ և $6 + 3 = 9$ ամբողջ թվերի միջև՝ $7 < a + b < 9$: Այստեղ 5-ը և 2-ը a և b թվերի 1 ճշտությամբ մոտարկումներն են ներքևից, իսկ 6-ը և 3-ը՝ a և b թվերի 1 ճշտությամբ մոտարկումները՝ վերևից:
$a + b$ գումարի համար ստացեք ավելի ճշգրիտ գնահատականներ՝ կլորացնելով a և b թվերը

ա) 0,1 ճշտությամբ,
բ) 0,01 ճշտությամբ,
գ) 0,001 ճշտությամբ:

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$$kx + b > 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

4.1 Թվային անհավասարությունների հատկությունները

Իրական թվերը ենթարկվում են հետևյալ կանոններին՝

1-ին կանոն: ***Յանկացած երկու*** a ***և*** b ***իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ առնչություններից միայն մեկը.***
$a = b$, $a > b$, $a < b$:

Օրինակ, 6 և 10 թվերի համար ճիշտ է $6 < 10$ անհավասարությունը, և ճիշտ չեն $6 = 10$ հավասարությունը և $6 > 10$ անհավասարությունը: Նկատենք, որ եթե $a > b$, ապա $b < a$:

Միևնույն նշանի անհավասարությունները անվանում են միանուն, օրինակ, $-2 < 5$ և $3 < 11$ միանուն են, $-5 > -10$ և $10 > -3$-ը՝ նույնպես:

2-րդ կանոն: ***Յանկացած երկու*** a ***և*** b ***իրական թվերի համար, որոնք բավարարում են*** $a < b$ ***պայմանին, գոյություն ունի այնպիսի*** c ***իրական թիվ, որ*** $a < c$ ***և*** $c < b$ ***կամ որ նույնն է՝*** $a < c < b$:

Օրինակ, 1,2 և 1,3 թվերի համար գոյություն ունի 1,22 թիվ, այնպես, որ
$1{,}2 < 1{,}22 < 1{,}3$:

3-րդ կանոն: ***Յանկացած*** a, b ***և*** c ***իրական թվերի համար*** $a < b$ ***և*** $b < c$ ***անհավասարություններից հետևում է*** $a < c$ ***անհավասարությունը: (Այս հատկությունը կոչվում է անհավասարությունների փոխանցելիության (տրանզիտիվության) հատկություն):***

Օրինակ, $\frac{8}{9} < 1$ և $1 < \frac{4}{3}$ անհավասարություններից հետևում է, որ

$$\frac{8}{9} < \frac{4}{3}:$$

4-րդ կանոն: ***Ցանկացած*** a, b ***և*** c ***իրական թվերի համար*** $a < b$ ***անհավասարությունից հետևում է*** $a + c < b + c$ ***անհավասարությունը:***

Այս հատկությունը նշանակում է, որ անհավասարության նշանը չի փոխվի, եթե անհավասարության աջ և ձախ մասերին գումարենք միևնույն թիվը:

Օրինակ, $6 < 11$ ստույգ (ճշմարիտ) անհավասարության երկու մասերին գումարելով -4, կստանանք ճշմարիտ անհավասարություն՝

$$6 - 4 < 11 - 4 \text{ կամ } 2 < 7:$$

5-րդ կանոն: ***Ցանկացած*** a ***և*** b ***իրական թվերի և ցանկացած*** c ***դրական թվի համար*** $a < b$ ***անհավասարությունից հետևում է*** $ac < bc$ ***անհավասարությունը:***

Այս հատկությունը նշանակում է, որ անհավասարության նշանը չի փոխվի, եթե անհավասարության ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք միևնույն դրական թվով:

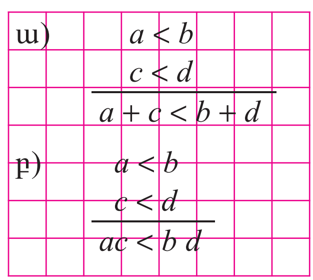
Օրինակ, $-6 < 2$ ճշմարիտ անհավասարության ձախ և աջ մասերը բազմապատկելով 3-ով, կստանանք $-6 \cdot 3 < 2 \cdot 3$ կամ $-18 < 6$ ճշմարիտ անհավասարությունը:

Վերը թվարկած հինգ կանոններից բխում են անհավասարությունների հետևյալ ***հատկությունները***՝

Հատկություն 1. ***Եթե*** a, b, c ***և*** d ***թվերը այնպիսին են, որ*** $a < b$ ***և*** $c < d$, ***ապա***

$$a + c < b + d:$$

Դա նշանակում է, որ ճշմարիտ միանուն անհավասարությունները կարելի է անդամ առ անդամ գումարել (նկ. 15 ա)



Նկ. 15

Իրոք, $a < b$ պայմանից 4-րդ կանոնի հիման վրա հետևում է, որ

$$a + c < b + c,$$

իսկ $c < d$ պայմանից նույն՝ 4-րդ կանոնի հիման վրա հետևում է, որ

$$b + c < b + d:$$

Այժմ կիրառելով 3-րդ կանոնը, ստանում ենք

$$a + c < b + d:$$

⌈**Հատկություն 2:** ***Մի իրական թիվը մեծ է մյուսից, եթե նրանց տարբերությունը դրական է, և հակառակը, եթե երկու թվերի տարբերությունը դրական է, ապա առաջին թիվը մեծ է երկրորդից:***

Իրոք, եթե $a > b$ անհավասարության երկու մասերին գումարենք միևնույն $(-b)$ թիվը, կստանանք $a + (-b) > b + (-b)$, կամ որ նույնն է՝ $a - b > 0$:

Եվ հակառակը, եթե $a - b > 0$ անհավասարության ձախ և աջ մասերին գումարենք b թիվը, կստանանք՝ $a - b + b > 0 + b$ կամ $a > b$:⌋

Հատկություն 3: ***Եթե*** a, b, c ***և*** d ***դրական թվերը այնպիսին են, որ*** $a < b$ և $c < d$, ***ապա*** $ac < bd$:

Դա նշանակում է, որ ճշմարիտ միանուն անհավասարությունները, որոնց ձախ և աջ մասերը դրական թվեր են, կարելի է անդամ առ անդամ բազմապատկել:

Իրոք, a, b, c և d դրական թվերի համար 5-րդ կանոնի հիման վրա $a < b$ պայմանից ստանում ենք $ac < bc$, իսկ $c < d$ պայմանից ստանում ենք $bc < bd$: Այժմ 3-րդ կանոնի հիման վրա ստանում ենք $ac < bd$:

Հատկություն 4. ***Եթե*** a ***և*** b ***դրական թվերը այնպիսիք են, որ*** $a < b$, ***ապա***

$$a^2 < b^2:$$

Այս հատկությունը բխում է հատկություն 3-ից $c = a$ և $d = b$ պայմանի դեպքում:

Շարունակելով նույն կերպ՝ հաջորդ բնական ցուցիչով աստիճանների համար նույնպես կստանանք՝

$$a^3 < b^3,\ a^4 < b^4,\ a^5 < b^5,\ ....,\ a^n < b^n,\ n \in \mathrm{N}:$$

(Այս փաստի խիստ հիմնավորված ապացույցը կատարվում է այսպես կոչված ***մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի*** օգնությամբ, որին դուք կծանոթանաք հետագայում):

Հատկություն 5: ***Եթե*** a ***և*** b ***թվերը այնպիսիք են, որ*** $a < b$, ***ապա*** $-a > -b$:

Իսկապես, $a < b$ անհավասարության ձախ և աջ մասերին գումարելով $(-b - a)$ թիվը՝ 4-րդ կանոնի հիման վրա կստանանք՝

$$a + (-b - a) < b + (-b - a),$$

որտեղից և հետևում է, որ $-b < -a$ կամ $-a > -b$:

Հատկություն 6: ***Եթե*** c***-ն բացասական թիվ է, իսկ*** a***-ն և*** b***-ն այնպիսի թվեր են, որ*** $a < b$, ***ապա*** $ac > bc$:

Դա նշանակում է, որ ճշմարիտ անհավասարության նշանը կփոխվի հակադիրով, եթե նրա երկու մասը բազմապատկենք միևնույն բացասական թվով:

Իրոք, նախ $a < b$ անհավասարությունից հետևում է, որ $-a > -b$:

Բազմապատկելով այս անհավասարությունը $-c$ դրական թվով՝ կստանանք՝

$$(-a) \cdot (-c) > (-b) \cdot (-c),$$

որտեղից և $ac > bc$:

Հատկություն 7. ***Եթե*** a ***և*** b ***դրական թվերն այնպիսին են, որ*** $a < b$, ***ապա***

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}:$$

Իսկապես, համաձայն 5-րդ կանոնի՝ $a < b$ անհավասարությունը բազմապատկելով $\frac{1}{ab}$ դրական թվով, կրճատումներից հետո կստանանք՝

$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ կամ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ անհրաժեշտ անհավասարությունը:

Վերը գործածվում էին հավասարության (=) և խիստ անհավասարության (< և >) նշանները: Երբեմն անհրաժեշտ է լինում օգտագործել ***ոչ խիստ անհավասարություններ:***

Օրինակ: Այս ձմեռ ջերմաստիճանը Մոսկվայում -30°C-ից ներքև չի իջել: Եթե ջերմաստիճանը նշանակենք t տառով, ապա ձմռան ցանկացած օր կամ $t > -30$°C, կամ $t = -30$°C, որը գրառվում է այսպես՝

$$t \geqslant -30°\text{C}:$$

Բերենք $a \leqslant b$ և $a \geqslant b$ ոչ խիստ անհավասարությունների սահմանումները:

$a \leqslant b$ անհավասարությունը արտահայտում է այն, որ կամ $a < b$, կամ $a = b$: Այն ճիշտ չէ միայն $a > b$ դեպքում:

$a \leqslant b$ գրառումը կարդում են այսպես՝ «a-ն մեծ չէ b-ից» կամ «a-ն փոքր կամ հավասար է b-ին»:

$a \geqslant b$ թվային անհավասարությունը արտահայտում է այն, որ $a > b$ կամ $a = b$:

$a \geqslant b$ գրառումը կարդում են այսպես՝ «a-ն փոքր չէ b-ից» կամ «a-ն մեծ կամ հավասար է b-ին»:

Օրինակ, $5 \leqslant 6$ և $4 \geqslant 2^2$ անհավասարությունները ճշմարիտ են, իսկ $9 \leqslant 7$ և $3 \geqslant 4$ անհավասարությունները սխալ են:

Ոչ խիստ անհավասարությունների համար վերը բերված 3-5 կանոնները և 1, 3-7 հատկությունները մնում են ճիշտ, եթե նրանցում խիստ անհավասարության նշանը փոխարինվի ոչ խիստ անհավասարության նշանով: Ձևակերպենք այդ հատկություններից մեկը:

Հատկություն 4.* Եթե a և b դրական թվերն այնպիսիք են, որ $a \leqslant b$, ապա $a^2 \leqslant b^2$:

Մենք արդեն նշել ենք, որ եթե $a < b$ և $b < c$, ապա գրում են $a < b < c$:

Նույն կերպ, եթե $a \leqslant b$ և $b < c$, ապա գրում են $a \leqslant b < c$, եթե $a < b$ և $b \leqslant c$, ապա գրում են $a < b \leqslant c$, եթե $a \leqslant b$ և $b \leqslant c$, ապա գրում են $a \leqslant b \leqslant c$:

$a < b < c$, $a \leqslant b < c$, $a < b \leqslant c$, $a \leqslant b \leqslant c$ անհավասարություններն անվանում են ***կրկնակի անհավասարություններ:***

Օգտագործելով անհավասարությունների հիմնական հատկությունները՝ լուծենք հետևյալ խնդիրները:

Խնդիր 1. Ապացուցենք, որ ցանկացած a և b ոչ բացասական իրական թվերի և n բնական թվի համար, եթե

$$a^n > b^n, \text{ ապա } a > b:$$

Ապացույց: Եթե $b = 0$, ապա $0^n = 0$, և $a^n > 0$ պայմանից, հաշվի առնելով նաև $a \neq 0$ պայմանը, կստանանք $a > 0$, այսինքն $a > b$:

Մնում է քննարկել $a > 0$, $b > 0$ դեպքը:

Համաձայն թվերի համեմատության հիմնական սկզբունքի, ցանկացած a և b իրական թվերի համար հնարավոր է երեք դեպք՝

$$\text{կամ } a < b, \text{ կամ } a = b, \text{ կամ } a > b:$$

Եթե $a < b$, ապա $b > a$ և ըստ նախորդ հատկության, $b^n > a^n$, որը հակասում է տրված $a^n > b^n$ պայմանին:

Եթե $a = b$, ապա $a^n = b^n$, որը նույնպես հակասում է $a^n > b^n$ պայմանին: Ուստի մնում է $a > b$ դեպքը, և պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 2. Ապացուցենք, որ կամայական a և b դրական թվերի և n բացասական ամբողջ թվի համար՝ եթե $a > b$, ապա $a^n < b^n$:

Ապացույց: Քանի որ n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $-n$-ը կլինի բնական թիվ, և համաձայն 4-րդ հատկության, $a > b$ պայմանից կհետևի $a^{-n} > b^{-n}$ անհավասարությունը, կամ որ նույնն է

$$\frac{1}{a^n} > \frac{1}{b^n}, \qquad (1)$$

քանի որ, ըստ սահմանման,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ b^{-n} = \frac{1}{b^n}: \qquad (2)$$

Ըստ բնական ցուցիչով աստիճանի սահմանման, a^{-n} և b^{-n} թվերը դրական են որպես $-n$ հատ դրական թվերի արտադրյալներ, ուստի դրական են նաև a^n և b^n թվերը, որովհետև ըստ (2) պայմանի՝

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}},\ b^n = \frac{1}{b^{-n}}:$$

Հետևաբար (1) անհավասարության երկու մասը բազմապատկելով $a^n \cdot b^n$ դրական թվով՝ կստանանք

$$\frac{1}{a^n}\, a^n \cdot b^n > \frac{1}{b^n}\, a^n \cdot b^n \text{ կամ } b^n > a^n$$

ճիշտ անհավասարությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 3. Ապացուցենք, որ ցանկացած a և b դրական թվերի և n բացասական ամբողջ թվի համար եթե

$$a^n > b^n, \text{ ապա } a < b:$$

Ապացույց: Նախորդ հատկության ապացույցում տեսանք, որ եթե $a > 0$ և $b > 0$ ապա $a^n > 0$ և $b^n > 0$: Ուստի $a^n > b^n$ անհավասարության երկու մասը բազմապատկելով $\frac{1}{a^n \cdot b^n}$ դրական թվով, ստանում ենք

$$a^n \cdot \frac{1}{a^n \cdot b^n} > b^n \cdot \frac{1}{a^n \cdot b^n} \text{ կամ } \frac{1}{b^n} > \frac{1}{a^n}$$

ճշմարիտ անհավասարությունը: Համաձայն (2) պայմանի՝ վերջին անհավասարությունը կարելի է գրել

$$b^{-n} > a^{-n}$$

տեսքով:

Սակայն քանի որ n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $-n$-ը բնական թիվ է, ուստի, համաձայն խնդիր 1-ի, վերջին անհավասարությունից ստանում ենք $b > a$ պայմանը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:⌋

346. Ո՞ր անհավասարությունները կարելի է
ա) գումարել, բ) բազմապատկել:

347. Ի՞նչ դեպքում $a \geqslant b$ անհավասարությունը
ա) ճշմարիտ է, բ) սխալ է:

348. Համեմատեք՝
ա) 5 և 9; բ) –5 և –9; գ) 2,5 · 4 և 10;
դ) 1,2 և 1,202; ե) –6,7 և 1; զ) –5,404 և –5,4:

349. Նշեք նշված թվերից մեկից մեծ և մյուսից փոքր թիվ: Պատասխանը գրեք կրկնակի անհավասարության տեսքով՝
ա) 3 և 5; բ) -25 և -29; գ) 2,5 և 2,6;
դ) 2,4 և 2,404; ե) $-3,71$ և $-3,72$; զ) $-0,501$ և 0,6:

350. Երկու ճշմարիտ անհավասարությունների հիման վրա կատարեք եզրակացություն:
Օրինակ $3 < 15$ և $15 < 20$, նշանակում է $3 < 20$:
ա) $-5 < 0$ և $0 < 2$; բ) $-2 < 0$ և $0 < 2$;
գ) $2 > 1$ և $1 > 0$; դ) $2,(1) > 2$ և $2 > 1,(6)$;
ե) $-3,7 > -4$ և $-4 > -7$; զ) $0,(5) < 0,(6)$ և $0,(6) < 0,(67)$;
է) $\frac{5}{6} < 1$ և $1 < \frac{9}{8}$; ը) $\frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ և $\frac{1}{2} < \frac{8}{16}$:

351. Դիցուք $x < 4$: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ
ա) $x^{-2} < 9$; բ) $x^{-2} < 16$; գ) $x^{-2} < 64$:

352. Դիցուք $x > 4$: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ
ա) $x^{-2} > 9$, բ) $x^{-2} > 16$, գ) $x^{-2} > 64$

353. Դիցուք $x^{-2} < 3^{-2}$: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ $x < 3$:

354. Դիցուք $1,1^{n} < 1,1^{-4}$ (n-ը ամբողջ թիվ է): Կարո՞ղ ենք պնդել, որ $n < -4$:

355. Տված ճշմարիտ անհավասարությունից ստացեք նոր ճշմարիտ անհավասարություն՝ գումարելով նրա երկու մասերին միևնույն թիվը՝
ա) $15 < 20$; բ) $5 > 4$; գ) $2,5 < 3$;
դ) $1,1 < 1,2$; ե) $1,3 \geqslant 1,2$; զ) $5 \leqslant 6$:

356. Տված ճշմարիտ անհավասարությունից ստացեք նոր ճշմարիտ անհավասարություն՝ նրա երկու մասը բազմապատկելով միևնույն դրական թվով՝
ա) $15 < 20$; բ) $5 > 4$; գ) $-2,5 < 3$;
դ) $1,1 < 1,2$; ե) $1,3 \geqslant 1,2$; զ) $-5 \leqslant 6$:

357. Գումարեք ճշմարիտ թվային անհավասարությունները՝
ա) $14 > 11$ և $10 > 9$; բ) $-2 > -3$ և $3 > 2$;
գ) $-6 < -5$ և $2 < 3$; դ) $-8 \leqslant 0$ և $8 \leqslant 9$:

358. Բազմապատկեք ճշմարիտ թվային անհավասարությունները՝

ա) $14 > 10$ և $2 > 1$; բ) $5 > 3$ և $6 > 5$;

գ) $6 < 7$ և $2 < 3$; դ) $8 < 9$ և $1 < 2$:

359. Տված ճշմարիտ անհավասարությունից ստացեք ճշմարիտ անհավասարություն, որում յուրաքանչյուր թիվ փոխարինված է իր հակադիրով:

Օրինակ, քանի որ $19 > 13$, ապա $-19 < -13$:

ա) $3 > 0$; բ) $5 > -1$; գ) $-9 < -1$;

դ) $-5 \leqslant -1$; ե) $9 \geqslant -2$; զ) $0 \leqslant 3$:

360. Բազմապատկեք ճշմարիտ անհավասարության երկու մասը միևնույն բացասական թվով:

ա) $1 < 2$; բ) $5 > 4{,}5$; գ) $6{,}5 \leqslant 6{,}9$;

դ) $1{,}1 < 1{,}2$; ե) $1{,}3 \geqslant 1{,}2$; զ) $5 \leqslant 6$:

Ճի՞շտ է արդյոք ստացված անհավասարությունը:

361. Գրեք անհավասարություն, որն ստացվում է տված անհավասարության ձախ և աջ մասերի թվերը փոխարինելով նրանց հակադարձներով:

Օրինակ, քանի որ $5 < 6$, ապա $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$:

ա) Քանի որ $6 > 3$, ապա ...; բ) Քանի որ $7 \leqslant 10$, ապա ...;

գ) Քանի որ $2 < 4$, ապա ...; դ) Քանի որ $11 < 12$, ապա ...;

ե) Քանի որ $13 \geqslant 12$, ապա ...; զ) Քանի որ $15 \leqslant 26$, ապա ...;

Ճի՞շտ է արդյոք ստացված անհավասարությունը:

362. Համեմատեք՝

ա) 2^2 և 9^2; բ) 5^2 և 6^2;

գ) 4^2 և 10^2; դ) $1{,}3^2$ և $1{,}5^2$;

ե) $7{,}28^2$ և $8{,}37^2$; զ) $5{,}4^2$ և $4{,}5^2$;

է) $(-2)^2$ և $(-3)^2$; ը) 4^2 և $(-4)^2$;

թ) $(-4)^2$ և 1^2; ժ) $(-1)^2$ և $(-1{,}4)^2$;

ի) $(-4{,}9)^2$ և $(-7)^2$; լ) 4^2 և $(-5)^2$:

363. Ճի՞շտ է արդյոք անհավասարությունը՝

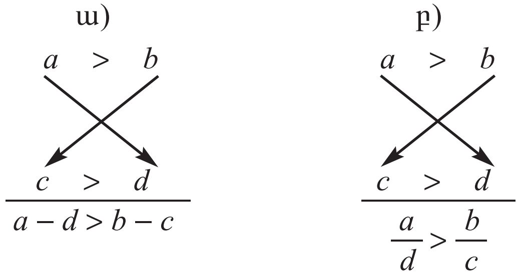
ա) $6{,}7272 \leqslant 6{,}(72) < 6{,}7273$;

բ) $-0{,}3131 < -0{,}(3) \leqslant -0{,}3132$:

364. Ապացուցեք, որ.

ա) եթե $a > b$ և $c > d$, ապա $a - d > b - c$ (նկ. 16 ա)

բ) եթե $a < b$ և $c < d$, ապա $a - d < b - c$:



Նկ. 16

365. Դրական a, b, c և d թվերի համար ապացուցեք, որ

ա) եթե $a > b$ և $c > d$, ապա $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ (նկ. 16 բ)

բ) եթե $a < b$ և $c < d$, ապա $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$:

366. Ապացուցեք, որ եթե $a < b < 0$, ապա $a^2 > b^2$:

367. Գոյություն ունե՞ն արդյոք այնպիսի a և b թվեր, որոնց համար.

ա) $a < \frac{71}{100}$, $b > 0,7$ և $a > b$, բ) $a > -2$, $b < -2,07$ և $a = b$:

368. Հետևյալ պայմաններից հնարավո՞ր է եզրակացնել a և b թվերից որն է մեծ մյուսից:

ա) $a < 1$, $b > 1,01$ բ) $a < 0$, $b < -2$

գ) $a + 3 < b - 4$ դ) $2a + 5 > 3b - 2$

369. Ապացուցեք, որ եթե

ա) $a > b$ և $b > c + 0,1$ ապա $a > c$,

բ) $a < b$, $b < c$, $c < d$, ապա $a < d$,

գ) $a - 4 > b - 8$ և $b - 10 > c - 18$, ապա $a - 16 > c - 28$:

370. Ապացուցեք, որ եթե

$a < 0,9$, $b < c$ և $b > 1$, ապա $a < c$:

371. Ապացուցեք, որ ցանկացած a-ի համար

ա) $4 + 2a > 3,9 + 2a$ բ) $7 - 5a > - 5a$:

372. Ապացուցեք, որ եթե
ա) $a + b < c + b$ ապա $a < c$
բ) $a + 2{,}1 < b + 2$, ապա $a < b$
գ) $a - 4 > b - 3$, ապա $a > b$:

373. Ապացուցեք, որ ցանկացած m և n բնական թվերի համար
ա) $m + n > 1{,}99$
բ) $3m + 2n > 3m + 1{,}9$:

374. Ապացուցեք, որ եթե
ա) $-a < 1$ և $b < -1{,}01$, ապա $a > b$,
բ) $a > -1{,}2$ և $-b < -1{,}3$, ապա $b > -a$:

375. Ապացուցեք, որ կամայական x, y, z բնական թվերի համար
ա) եթե $x + 2 < y$ և $y + 3 < z$, ապա $x + 6 < z$
բ) եթե $x + 4 > y$ և $y + 10 > z + 2$, ապա $x + 16 > z + 5$:

376. Դիցուք $a > b$: Ապացուցեք, որ
ա) $4 - 0{,}7a < 4 - 0{,}7b$,
բ) $\frac{2}{3}a - 5 > \frac{2}{3}b - 5$:

377. Ապացուցեք, որ եթե
ա) $-0{,}5x + 1 > -0{,}5y + 1$, ապա $x < y$,
բ) $\frac{2}{3}x - 2 > \frac{2}{3}y - 1{,}9$, ապա $x > y$:

378. Ապացուցեք, որ եթե $0 < a < 1$ և n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $a^n > 1$:

379. Ապացուցեք, որ եթե $a > 1$ և n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $a^n < 1$:

380. Ապացուցեք, որ եթե $0 < a < 1$, իսկ m-ը և n-ը բացասական ամբողջ թվեր են, ընդ որում $m > n$, ապա $a^m < a^n$:⌋

4.2 Միջակայքերի պատկերումը թվային ուղղի վրա

Նկ. 17

Դիցուք տված են x կոորդինատային առանցքը և $a < b$ պայմանին բավարարող երկու իրական թվեր: a և b թվերը կարելի է դիտարկել որպես x առանցքի երկու տարբեր կետերի կոորդինատներ, որը մենք պայմանավորվեցինք անվանել նաև a և b կետեր (նկ. 17):

x-երի առանցքի a և b կետերից և նրանց միջև գտնվող բոլոր կետերից բաղկացած բազմությունը (նկ. 5) անվանում են a-ից b հատված և նշանակում՝ $[a; b]$:

Այսպիսով, $[a; b]$ ***հատվածը բոլոր այն*** x ***իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a \leqslant x \leqslant b$$

կրկնակի անհավասարությանը:

a ***և*** b ***կետերը անվանում են*** $[a; b]$ ***հատվածի ծայրակետեր:*** $[a; b]$ ***հատվածի ծայրակետերը պատկանում են այդ հատվածին:***

Եթե $[a; b]$ հատվածից հեռացնենք նրա երկու ծայրակետերը, ապա կստանանք կետերի բազմություն, որը նշանակում են $(a; b)$-ով և անվանում a-ից b ինտերվալ (կամ բաց միջակայք):

Այսպիսով, $(a; b)$ ***ինտերվալը (բաց միջակայքը) բոլոր այն*** x ***իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a < x < b$$

կրկնակի անհավասարությանը:

Եթե $[a; b]$ հատվածից հեռացնենք b կետը, ապա կստանանք կետերի բազմություն, որը նշանակում են $[a; b)$-ով և անվանում a-ից b կիսաինտերվալ՝ a-ն ներառած (կամ կիսաբաց միջակայք):

Այսպիսով, $[a; b)$ ***կիսաբաց միջակայքը բոլոր այն իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a \leqslant x < b$$

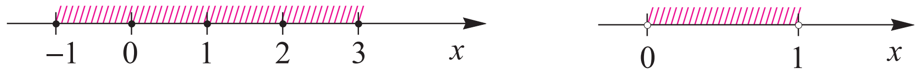
կրկնակի անհավասարությանը, իսկ $(a; b]$ ***կիսաբաց միջակայքը (կիսաինտերվալը) բոլոր այն իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a < x \leqslant b$$

կրկնակի անհավասարությանը:

Օրինակ 1. $[-1; 3]$ հատվածը (փակ միջակայքը) $-1 \leqslant x \leqslant 3$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 18 ա):

Օրինակ 2. $(0; 1)$ բաց միջակայքը (ինտերվալը) $0 < x < 1$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 18 բ):



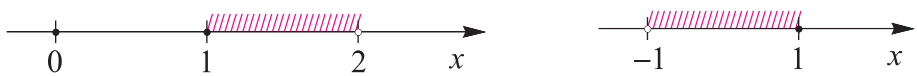
ա) բ)

Նկ. 18

Դիտողություն: Դիտարկվող միջակայքին պատկանող ծայրակետերը թվային ուղղի վրա նշվում են սև (մուգ) կետերով, իսկ չպատկանող կետերը՝ շրջանակներով:

Օրինակ 3. [1; 2) կիսաբաց միջակայքը (կիսաինտերվալը) $1 \leqslant x < 2$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 19 ա):

Օրինակ 4. (−1; 1] կիսաբաց միջակայքը (կիսաինտերվալը) $-1 < x \leqslant 1$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 19 բ)



ա) բ)

Նկ. 19

Եթե x կետը Ox առանցքի դրական ուղղությամբ շարժվում է այնպես, որ նրա կոորդինատը ընդունում է ցանկացած մեծ արժեքներ, ապա ասում են, որ այդ կետը ձգտում է պլյուս անվերջության և նշանակում են՝ $x \to +\infty$:

Նույն կերպ, եթե x կետը շարժվում է Ox առանցքի բացասական ուղղությամբ այնպես, որ նրա x կոորդինատի համար $|x|$-ը կարող է լինել որքան ուզեք մեծ թիվ, ապա ասում են, որ այդ կետը ձգտում է մինուս անվերջության և նշանակում՝ $x \to -\infty$:

Վերը համարվում էր, որ a-ն և b-ն թվեր են (կամ x առանցքի կետեր), բայց «ինտերվալ» («միջակայք») տերմինը հասկանում են նաև ավելի լայն իմաստով՝ փոխարինելով a-ն $-\infty$-ով, կամ b-ն՝ $+\infty$-ով:

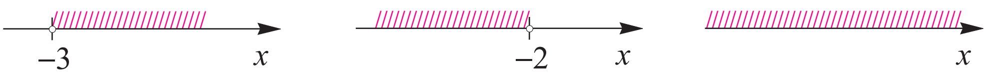
$(a; +\infty)$ ***միջակայքը (ինտերվալը), որտեղ*** a-***ն տրված թիվ է, բոլոր այն*** x ***իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են*** $x > a$ ***անհավասարությանը, կամ*** x-***երի առանցքի բոլոր այն կետերը, որոնք ունեն*** $x > a$ կոորդինատը:

$(-\infty; a)$ ***միջակայքը (ինտերվալը), որտեղ*** a-***ն տրված թիվ է, բոլոր այն*** x ***իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են*** $x < a$ ***անհավասարու-***

բությանը կամ x***-երի առանցքի բոլոր այն կետերը, որոնք ունեն*** $x < a$ ***կոորդինատը:***

Վերջապես, $(-\infty; +\infty)$ ***միջակայքը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է կամ*** x***-երի առանցքի բոլոր կետերի բազմությունը:***

Օրինակ, 20 ա) նկարում պատկերված է $(-3; +\infty)$ միջակայքը, 20 բ) նկարում՝ $(-\infty; -2)$ միջակայքը, 20 գ) նկարում՝ $(-\infty; +\infty)$ միջակայքը:



ա) բ) գ)

Նկ. 20

Այսպիսով, $(a; b)$ միջակայքը կարող է լինել վերջավոր, եթե a-ն և b-ն տված թվեր են (կամ x առանցքի կետեր), և կարող է լինել անվերջ, եթե a-ն կամ b-ն համապատասխանաբար $-\infty$ կամ $+\infty$ են:

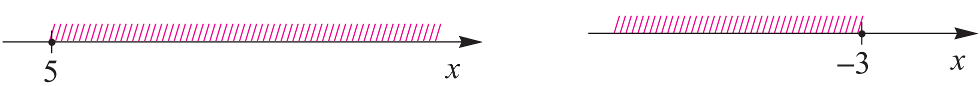
$[a; b]$ փակ միջակայքը (հատվածը) միշտ վերջավոր է: Հատվածը որոշվում է a և b տված թվերով (կամ x առանցքի կետերով):

$[a; b)$ և $(a; b]$ կիսաբաց միջակայքերը (կիսաինտերվալները) նույնպես կարող են լինել անվերջ:

$[a; +\infty)$ ***կիսաբաց միջակայքը (կիսաինտերվալը) բոլոր այն*** x ***իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են*** $x \geqslant a$ ***անհավասարությանը կամ*** x ***առանցքի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք ունեն*** $x \geqslant a$ ***կոորդինատը:***

$(-\infty; b]$ ***կիսաբաց միջակայքը բոլոր այն*** x ***իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են*** $x \leqslant b$ ***անհավասարությանը կամ*** x ***առանցքի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք ունեն*** $x \leqslant b$ ***կոորդինատը:***

Օրինակ, 21 ա) նկարում պատկերված է $[5; +\infty]$ կիսաբաց միջակայքը, իսկ 21 բ) նկարում՝ $(-\infty; -3]$ կիսաբաց միջակայքը:



ա) բ)

Նկ. 21

Երբեմն փակ, բաց, կիսաբաց բոլոր տիպի միջակայքերի համար օգտագործում են ընդհանուր անվանում՝ ***թվային միջակայքեր:***

Բացի փակ, բաց և կիսաբաց միջակայքերից դիտարկում են նաև ուրիշ թվային բազմություններ, դրանք հաճախ նշանակում են A, B, C,... տառերով:

Որոշ բազմություններ ունեն հատուկ նշանակումներ: Օրինակ, N-ը բնական թվերի բազմությունն է, Z-ը՝ ամբողջ թվերի բազմությունը, Q-ն՝ ռացիոնալ թվերի բազմությունը, R-ը բոլոր իրական թվերի բազմութոյւնը, R_+-ը իրական, ոչ բացասական թվերի բազմությունը:

Այն փաստը, որ թիվը պատկանում է կամ չի պատկանում թվային բազմությանը, գրառում են հատուկ նշանների միջոցով՝ $\in$ (պատկանում է) և $\notin$ (չի պատկանում):

Օրինակ, $-5 \in Z$ (-5-ը պատկանում է ամբողջ թվերի բազմությանը),

$-5 \notin N$ (-5-ը չի պատկանում բնական թվերի բազմությանը):

381. ա) Ո՞ր թվերի բազմությունն են անվանում փակ միջակայք (հատված), բաց միջակայք (ինտերվալ), կիսաբաց միջակայք (կիսաինտերվալ):
բ) Ի՞նչ է նշանակում $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ գրառումը:

382. Անվանեք թվային բազմությանը պատկանող բոլոր ամբողջ թվերը՝
ա) $[-3; 1]$ բ) $(-3; 1)$; գ) $[-3; 1)$; դ) $(-3; 1]$;
ե) $[-2; 3]$ զ) $(-2; 3)$; է) $[-2; 3)$; ը) $(-2; 3]$:
Ինչպե՞ս են անվանում այդ բազմություններից յուրաքանչյուրը:

383. Անվանեք թվային բազմությանը պատկանող երեք ամբողջ թվեր՝
ա) $[0; +\infty)$; բ) $(0; +\infty)$; գ) $(-\infty; 1)$; դ) $(-\infty; 1]$;

384. Կարդացեք թվային բազմության անվանումը և պատկերեք այն կոորդինատային ուղղի վրա՝
ա) $[3; 5]$; բ) $(3; 5)$; գ) $[3; 5)$; դ) $(3; 5]$;
ե) $[-2; +\infty)$; զ) $(-2; +\infty)$; է) $(-\infty; -2)$; ը) $(-\infty; -2]$:

385. Գրառեք նշանակումը՝
ա) 2-ից 4 փակ միջակայքի (հատվածի),
բ) 2-ից 4 բաց միջակայքի,
գ) 2-ից 4 կիսաբաց միջակայքի՝ 4-ը ներառած,
դ) 2-ից 4 կիսաբաց միջակայքի՝ 2-ը ներառած,
ե) 5-ից $+\infty$ միջակայքի,
զ) 5-ից $+\infty$ կիսաբաց միջակայքի,
է) $-\infty$-ից 0 միջակայքի,
ը) $-\infty$-ից 0 կիսաբաց միջակայքի:
Պատկերեք նշված բազմությունները թվային ուղղի վրա:

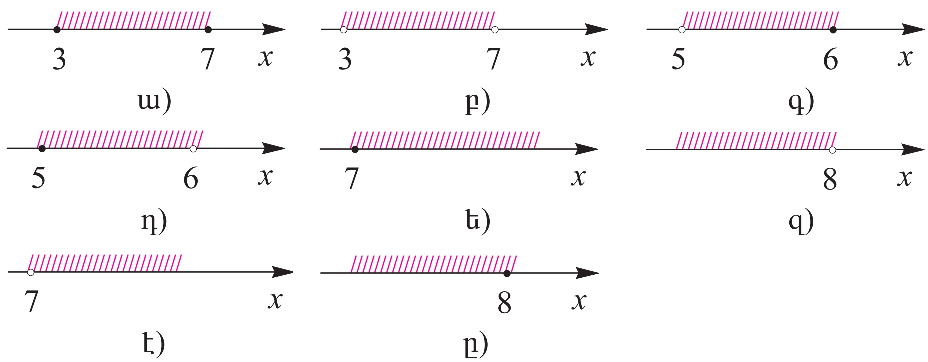
386. Պատկանո՞ւմ է արդյոք -2 թիվը թվային բազմությանը (գրառումը կատարեք $\in$ և $\notin$ նշանների օգնությամբ)։

ա) $[-3; 0]$; բ) $(-2; 3)$; գ) $(-\infty; -2]$; դ) $(-3; +\infty]$;
ե) N; զ) Z; է) Q; ը) R։

387. Պատկանո՞ւմ է արդյոք $\frac{2}{3}$ թիվը թվային բազմությանը (գրառումը կատարեք $\in$ և $\notin$ նշանների օգնությամբ)։

ա) $(0; 1]$; բ) $[1; 2]$; գ) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; դ) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$;
ե) N; զ) Z; է) Q; ը) R։

388. Գրառեք նկ. 22-ում պատկերված բազմությունները։

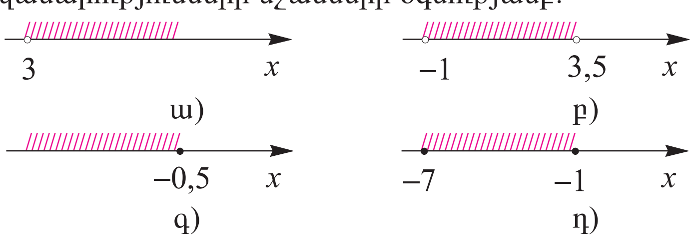


Նկ. 22

389. Նկ. 22-ում պատկերված թվային բազմություններից որո՞նց են համապատասխանում անհավասարությունները՝

ա) $x \geqslant 7$; բ) $x > 7$; գ) $x \leqslant 8$;
դ) $x < 8$; ե) $3 < x < 7$; զ) $3 \leqslant x \leqslant 7$;
է) $5 \leqslant x < 6$; ը) $5 < x \leqslant 6$։

390. Նկ. 23-ում պատկերված թվային բազմությունները գրառեք անհավասարությունների նշանների օգնությամբ։



Նկ. 23

391. Կոորդինատային առանցքի վրա նշեք այն թվերը, որոնք՝
ա) 3-ից փոքր են, բ) −5-ից մեծ են,
գ) 2-ից մեծ չեն, դ) 0-ից փոքր չեն,
ե) 7-ից մեծ են, բայց 10-ից փոքր, զ) −5-ից մեծ են, բայց −1-ից փոքր:
Գրառեք ստացված թվային բազմությունները:

392. Կոորդինատային առանցքի վրա նշեք՝
ա) [2; 5] հատվածը, բ) (−2; 0) միջակայքը:
Գրառեք այն կրկնակի անհավասարության տեսքով:

393. Կոորդինատային առանցքի վրա պատկերեք թվային միջակայքերը՝
ա) [−2; 3] և [0; 2] բ) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ և [−2; 0,3];
գ) (−4; 0,29) և $\left(\frac{2}{7}; 5\right)$; դ) $\left(-0{,}44; \frac{13}{40}\right)$ և $\left(-\frac{3}{7}; -\frac{1}{4}\right)$:
Նրանք ընդհանուր կետեր ունե՞ն:
Եթե այո, գրառեք այդ բազմությունների ընդհանուր մասը (հատումը):

4.3 Առաջին աստիճանի մեկ անհայտով անհավասարումներ

$$kx + b > 0 \tag{1}$$

կամ

$$kx + b < 0 \tag{2}$$

տեսքի անհավասարումները, որտեղ k***-ն և*** b***-ն տված թվեր են, ընդ որում*** $k \neq 0$, ***անվանում են առաջին աստիճանի մեկ*** x ***անհայտով անհավասարումներ:***

k թիվը անվանում են անհավասարման անհայտի ***գործակից,*** իսկ b-ն՝ ***ազատ անդամ:***

Մեկ x անհայտով ***անհավասարման լուծում*** անվանում են այնպիսի x_0 թիվը, որը անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելուց հետո ստացվում է ճիշտ թվային անհավասարություն:

Լուծել անհավասարումը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ այդպիսիք չկան:

Այստեղ և հետագայում դիտարկվում են x փոփոխականով անհավասարումներ, չնայած որ x-ի փոխարեն կարելի է գրել ցանկացած տառ՝ t, v, y, ...:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$2x + 5 < 0 \tag{3}$$

անհավասարումը:

Այն լուծելու համար կարելի է դատել այսպես.

Դիցուք մի որևէ x_0 թիվ (3) անհավասարման լուծում է: Այն տեղադրելով x-ի փոխարեն (3) անհավասարման մեջ՝ կստանանք

$$2x_0 + 5 < 0 \qquad (4)$$

ճիշտ թվային անհավասարությունը:

Գումարելով այդ անհավասարության երկու մասերին -5 թիվը՝ կստանանք

$$2x_0 < -5 \qquad (5)$$

ճիշտ թվային անհավասարությունը: Բաժանելով այդ անհավասարության երկու մասը 2 դրական թվի վրա՝ կստանանք

$$x_0 < -\frac{5}{2} \qquad (6)$$

ճիշտ թվային անհավասարությունը:

Հակառակը, դիցուք մի որևէ x_0 թիվ բավարարում է (6) անհավասարությունը: Բազմապատկելով այդ անհավասարությունը 2 դրական թվով՝ կստանանք (5) ճիշտ անհավասարությունը: Այնուհետև գումարելով (5) անհավասարության երկու մասերին 5 թիվը՝ կստանանք (4) ճիշտ թվային անհավասարությունը, այսինքն կստանանք, որ x_0-ն բավարարում է (3) անհավասարմանը:

Այսպիսով, (3) անհավասարության բոլոր լուծումների բազմությունը $x < -\frac{5}{2}$ պայմանին բավարարող բոլոր թվերի բազմությունն է: Կարելի է նաև ասել, որ (3) անհավասարության բոլոր լուծումները կազմում են

$$\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$$

միջակայքը (ինտերվալը) կամ (3) անհավասարության բոլոր լուծումների բազմությունը

$$\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$$

միջակայքն է:

Պատասխան՝ $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$:

Նման տիպի դատողություններ կարելի է անել նաև (1) և (2) տիպի ցանկացած առաջին աստիճանի անհավասարությունների լուծման դեպքում: Այդ դատողություններից բխում է մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարությունների լուծման հետևյալ եղանակը.

այդ անհավասարության ազատ անդամը տեղափոխել անհավասարության աջ մասը (փոխելով b-ի նշանը հակադիրով),

ստացված անհավասարության երկու մասը բաժանել անհայտի գործակցի վրա (ընդ որում, եթե $k > 0$, ապա անհավասարության նշանը չի փոխվում, իսկ եթե $k < 0$, ապա անհավասարության նշանը փոխվում է հակադիրով):

Ստացված անհավասարումը հենց պատասխանն է:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$-4x + 13 < 0 \tag{7}$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով ազատ անդամը աջ մաս, ստանում ենք

$$-4x < -13$$

անհավասարումը:

Այս անհավասարման երկու մասը բաժանելով -4 բացասական թվի վրա, ստանում ենք

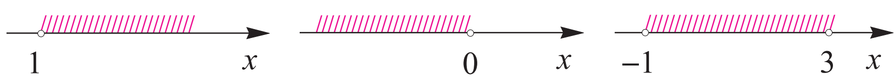
$$x > \frac{13}{4}$$

անհավասարումը (ուշադրություն դարձրեք անհավասարման նշանի փոփոխության վրա): Այսպիսով, (7) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$ միջակայքն է:

Պատասխան $\left(\frac{13}{4}, +\infty\right)$:

394. Կոորդինատային առանցքի վրա պատկերեք միջակայքը՝
ա) $(-2; 7)$; բ) $(-17; 34)$; գ) $(1234; 1398)$;
դ) $(-\infty; 0)$; ե) $(0; +\infty)$; զ) $(-\infty; -3)$;
է) $(2; +\infty)$; ը) $(-\infty; +\infty)$; թ) $\left(-\frac{1}{3}; 0{,}5\right)$:

395. Նկար 24-ում պատկերված միջակայքերը գրեք անհավասարությունների նշանների օգնությամբ:



ա) բ) գ)

Նկ. 24

396. Կոորդինատների առանցքի վրա պատկերեք բոլոր այն թվերը, որոնք բավարարում են նշված անհավասարումներին՝
ա) $x > 0$; բ) $x < 3$; գ) $x > 3579$;
դ) $x < -2$; ե) $x > -1748$; զ) $x < 0{,}00000006$;
է) $x > 5{,}(3)$; ը) $x < \pi$; թ) $0 < x < 1{,}41$;
ժ) $-2 < x < -0{,}5$; ի) $|x| < 1$; լ) $|x - 1| > 1$:

397. Ինչպիսի նշան ($=$; $\neq$; $<$; $>$) պետք է դնել a և b թվերի միջև, եթե $a - b$ տարբերությունը՝
ա) դրական թիվ է, բ) բացասական թիվ է,

գ) բնական թիվ է, դ) հավասար չէ զրոյի,
ե) հավասար է զրոյի:

398. Ո՞ր թիվն է մեծ՝
ա) a-ն, թե $a + 3$-ը, բ) $b + 1$-ը, թե՞ $b + 2$-ը,
գ) $a - 5$-ը, թե $a + 2$-ը, դ) $b - 7$-ը, թե $b - 6$-ը;
(այստեղ a-ն և b-ն ցանկացած տված թվեր են):

399. Կարելի՞ է արդյոք նշել
ա) $x > 0$ անհավասարման փոքրագույն լուծումը,
բ) $x < -2$ անհավասարման մեծագույն լուծումը,
գ) $x > -5$անհավասարման փոքրագույն ամբողջ լուծումը,
դ) $x < 1$ անհավասարման մեծագույն ամբողջ լուծումը:

400. $x - a$ տարբերությունը համեմատեք զրոյի հետ, եթե
ա) $x > a$; բ) $x < a$:

401. Գրեք մի որևէ մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարում: Անվանեք այդ անհավասարման անհայտի գործակիցը և ազատ անդամը:

402. ա) Ի՞նչն են անվանում մեկ անհայտով անհավասարման լուծում:
բ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել մեկ անհայտով անհավասարումը:

403. 3 թիվը հանդիսանո՞ւմ է նշված անհավասարման լուծում՝
ա) $x > 0$; բ) $x > -2$; գ) $x < \pi$;
դ) $-3 < x < 3$; ե) $x < 3{,}1$; զ) $2{,}(8) < x < 3{,}1$:

Լուծեք անհավասարումը (404-418).

404. ա) $x - 1 > 0$; բ) $x + 5 < 0$; գ) $x - 0{,}5 < 0$;
դ) $3 + x > 0$; ե) $7 + x > 0$; զ) $x - 1\frac{1}{3} < 0$:

405. ա) $x + 4 > 7$; բ) $x - 11 < -7$; գ) $x + 7 > 7$;
դ) $x - 6 < 6$; ե) $4 + x > 2$; զ) $3 + x < -6$:

406. ա) $x - 2 > 0{,}2$; բ) $x - 3{,}5 < 4$; գ) $2{,}1 + x < 7$;
դ) $x - 2 > -0{,}6$; ե) $x + 10{,}7 > 7{,}9$; զ) $5{,}013 + x < 0{,}13$:

407. ա) $x - 1783 < -\frac{1}{3}$; բ) $x + \frac{1}{5} < 199$; գ) $\frac{5}{7} + x > 2\frac{1}{2}$;

դ) $x - 2\frac{1}{2} < -1\frac{3}{5}$; ե) $x + \frac{37}{90} < \frac{11}{18}$; զ) $\frac{13}{48} + x > 7\frac{15}{16}$:

408. ա) $x - 3{,}6 > 2\frac{1}{3}$; բ) $7{,}4 + x > 7\frac{2}{5}$; գ) $x - 12\frac{1}{4} < 15{,}3$:

409. ա) $2x > 4$; բ) $7x < -14$; գ) $-5x < 100$;
դ) $-3x < 9$; ե) $-2x > -2$; զ) $-3x > -6$:

410. ա) $3x < 2$; բ) $-2x < 11$; գ) $-4x > -2$;
դ) $-5x > 1$; ե) $-17x > -2$; զ) $13x < 3$:

411. ա) $2x > 0$; բ) $-2x < 0$; գ) $-x < 2$;
դ) $-x < 0$; ե) $-x > -2$; զ) $-x > 1$:

412. ա) $\frac{1}{2}x < 3$; բ) $\frac{3}{4}x < 1$; գ) $-\frac{1}{3}x > -1$;

դ) $\frac{1}{5}x > 0$; ե) $2x > \frac{2}{3}$; զ) $-4x < \frac{8}{11}$:

413. ա) $\frac{2}{3}x < \frac{5}{6}$; բ) $-\frac{4}{7}x > \frac{8}{7}$; գ) $-2x < 1\frac{1}{3}$;

դ) $2\frac{1}{5}x > 3$; ե) $1\frac{1}{2}x > -2\frac{1}{2}$; զ) $-3\frac{2}{7}x < -3\frac{1}{7}$:

414. ա) $0{,}2x > 3$; բ) $3x > 1{,}8$; գ) $-0{,}001x < 1$:

415. ա) $0{,}2x > \frac{2}{5}$; բ) $1{,}5x < \frac{9}{10}$; գ) $-1{,}1x < 4\frac{2}{5}$;

դ) $\frac{x}{2} > 3$; ե) $\frac{x}{4} > \frac{7}{12}$; զ) $-\frac{2x}{3} < -8$:

416 ա) $2x - 4 > 0$; բ) $3x - 1 < 0$; գ) $-2x - 4 > 0$;
դ) $7x + 4 < 0$; ե) $4x + 3 > 0$; զ) $-4x + 3 < 0$:

417. ա) $1 + \frac{2}{9}x < 0$; բ) $\frac{4}{5} - 3x < 0$; գ) $1\frac{1}{7} - \frac{4}{7}x > 0$;

դ) $4\frac{1}{3}-8\frac{2}{3}x>0$; ե) $2\frac{1}{3}x-3\frac{1}{2}<0$; զ) $\frac{5}{7}x-\frac{5}{7}>0$:

418. ա) $0{,}003x-20<0$; բ) $4x+0{,}0001>0$; գ) $1{,}35-27x>0$;
դ) $0{,}15-150x<0$; ե) $-0{,}3x-13>0$; զ) $-0{,}17x-51<0$:

4.4 Մեկ անհայտով գծային անհավասարումներ

Անհավասարումները, որոնց ձախ և աջ մասերը x փոփոխականի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամներ կամ թվեր են, անվանում են x մեկ անհայտով գծային անհավասարումներ:

Հետևյալ անհավասարումները x մեկ փոփոխականով գծային անհավասարումների օրինակներ են՝

$2x+7<x-5,$ $0x-3<0$

$7<2x+9,$ $\frac{2}{3}x+0{,}7>2\frac{1}{3}x+5$

$2x+7>2x+5,$ $3x+2+x>x-1+x,$

$0x+2>0,$ $3x+2<0$:

Պարզ է, որ ցանկացած առաջին աստիճանի անհավասարում գծային անհավասարման մասնավոր դեպք է:

Գծային անհավասարման ձախ և աջ մասերում գտնվող բազմանդամների անդամները անվանում են ***այդ անհավասարման անդամներ:***

x_0 թիվը անվանում են x ***անհայտով գծային անհավասարման լուծում,*** եթե այն x-ի փոխարեն տեղադրելով անհավասարման մեջ՝ ստացվում է ճիշտ թվային անհավասարություն:

x մեկ անհայտով երկու անհավասարումներ անվանում են ***համարժեք,*** եթե առաջին անհավասարման ցանկացած լուծում հանդիսանում է նաև երկրորդի լուծում, և հակառակը, երկրորդի ցանկացած լուծում լուծում է նաև առաջինի համար: Ցանկացած անհավասարումներ, որոնք լուծումներ չունեն, համարվում են համարժեք: Անհավասարումները լուծելիս օգտվում են հետևյալ պնդումներից՝

1) ***Անհավասարման անդամները կարելի է տեղափոխել նրա մի կողմից մյուսը՝ փոխելով տեղափոխվող անդամի նշանը հակադիրով:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման մի որևէ անդամ հակադիր նշանով տեղափոխենք նրա մի կողմից մյուս կողմը, ապա կստանանք սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում:

Օրինակ, համարժեք են հետևյալ անհավասարումները`

$2x - 7 < 0$ և $2x < 7$,

$3x + 5 > 2x - 9$ և $3x - 2x + 5 > -9$:

2) ***Անհավասարման մեջ կարելի է կատարել նման անդամների միացում:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման ձախ կամ աջ մասերում կատարվի նման անդամների միացում, ապա կստացվի սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում:

Օրինակ, համարժեք են հետևյալ անհավասարումները`

$3x - 4\frac{1}{2} + 5x - \frac{1}{2} > 0$ և $8x - 5 > 0$,

$2x + 3 - 1 < x - 2x + 2$ և $2x + 2 < -x + 2$:

3) ***Անհավասարումը դրական թվով բազմապատկելիս (կամ բաժանելիս) նրա նշանը պահպանվում է:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման երկու մասը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն դրական թվով և պահպանենք անհավասարման նշանը, ապա կստանանք սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում: Օրինակ, համարժեք են հետևյալ անհավասարումները`

$\frac{1}{4}x > 2$ և $x > 8$,

$3x + 5 < 0$ և $x + \frac{5}{3} < 0$:

4) ***Անհավասարումը բացասական թվով բազմապատկելիս (կամ բաժանելիս) նրա նշանը փոխվում է հակադիրով:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման երկու մասը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն բացասական թվով և փոխենք անհավասարման նշանը հակադիրով, ապա կստանանք սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում: Օրինակ, հետևյալ անհավասարումները համարժեք են`

$7x - 3 > 0$ և $3 - 7x < 0$,

$5x + 4 < -3x + 2$ և $-5x - 4 > 3x - 2$:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$4x - 7 < -2x + 5 \qquad (1)$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով (1) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ` կստանանք`

$$4x - 7 + 2x - 5 < 0 \qquad (2)$$

անհավասարումը, որը համարժեք է (1)-ին: Ստացված անհավասարման ձախ կողմում կատարելով նման անդամների միացում կստանանք մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարում՝

$$6x - 12 < 0,$$

որը համարժեք է (1) անհավասարմանը: Նրա բոլոր լուծումները $(-\infty,\ 2)$ միջակայքի թվերն են: Հետևաբար (1) անհավասարման բոլոր լուծումները $(-\infty,\ 2)$ միջակայքի թվերն են:

Պատասխան՝ $(-\infty,\ 2)$:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$7x + 5 < 7x - 1 \qquad (2)$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով (2) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ՝ կստանանք նրան համարժեք

$$7x + 5 - 7x + 1 < 0 \qquad (3)$$

անհավասարումը:

(3) անհավասարման ձախ կողմում կատարելով նման անդամների միացում՝ կունենանք՝

$$0 \cdot x + 6 < 0 \qquad (4):$$

Ակնհայտ է, որ գոյություն չունի x-ի որևէ թվային արժեք, որը բավարարում է (4) անհավասարմանը: Հետևաբար (4) և նրան համարժեք (2) անհավասարումները լուծումներ չունեն:

Պատասխան՝ Լուծումներ չկան:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$9x - 5 > 9x - 6 \qquad (5)$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով (5) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ՝ կստանանք նրան համարժեք

$$9x - 5 - 9x + 6 > 0 \qquad (6)$$

անհավասարումը:

(6) անհավասարման ձախ մասում կատարելով նման անդամների միացում՝ ունենք՝

$$0 \cdot x + 1 > 0:$$

Ստացվեց անհավասարում, որը ճիշտ է x-ի բոլոր արժեքների համար, իսկ դա նշանակում է, որ (5) անհավասարման լուծում է հանդիսանում ցանկացած իրական թիվ, այսինքն (5) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $(-\infty, +\infty)$ միջակայքն է:

Պատասխան՝ $(-\infty, +\infty)$:

4.5 Ոչ խիստ գծային անհավասարումների լուծումը

$$kx + b \geqslant 0 \qquad (1)$$

կամ

$$kx + b \leqslant 0$$

տեսքի անհավասարումները, որտեղ k-ն և b-ն տված թվեր են, ընդ որում $k \neq 0$, անվանում են x անհայտով առաջին աստիճանի ոչ խիստ անհավասարում:

Այդպիսի անհավասարման լուծում անվանում են այն x_0 թիվը, որը անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով ստացվում է կամ ճիշտ թվային հավասարություն կամ ճիշտ թվային անհավասարություն:

Օրինակ, $x_0 = 2$-ը $3x - 5 \geqslant 0$ անհավասարման լուծում է, որովհետև այդ անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 2 ստանում ենք

$$3 \cdot 2 - 5 = 1 > 0$$

թվային անհավասարությունը:

$x_0 = -1$-ը $4x + 4 \leqslant 0$ անհավասարման լուծում է, որովհետև այդ անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով -1՝ ստանում ենք $4 \cdot (-1) + 4 = 0$ ճիշտ թվային հավասարությունը:

Լուծել ոչ խիստ անհավասարումը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ լուծումներ չկան:

Դիտարկենք

$$kx + b \geqslant 0 \ (k \neq 0) \qquad (1)$$

անհավասարումը:

Եթե մի որևէ x_0 թիվ հանդիսանում է (1) անհավասարման լուծում, ապա, ըստ ոչ խիստ անհավասարման լուծման վերը նշված սահմանման, կամ ճիշտ է

$$kx_0 + b > 0$$

թվային անհավասարությունը, կա՛մ

$$kx_0 + b = 0$$

թվային հավասարությունը:

Այլ կերպ ասած, եթե x_0-ն (1) անհավասարման լուծում է, ապա այն կա՛մ

$$kx + b > 0 \qquad (2)$$

անհավասարման լուծում է կա՛մ

$$kx + b = 0 \qquad (3)$$

հավասարման լուծում:

Նկատենք նաև, որ (2) անհավասարման ցանկացած լուծում և (3) հավասարման ցանկացած լուծում (1) անհավասարման լուծումներ են:

Հետևաբար, $kx + b \geqslant 0$ անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $kx + b > 0$ անհավասարման բոլոր լուծումների բազմության և $kx + b = 0$ հավասարման բոլոր լուծումների բազմության միավորումն է:

Նույն կերպ, $kx + b \leqslant 0$ ***անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը***

$kx + b < 0$ ***անհավասարման բոլոր լուծումների բազմության և*** $kx + b = 0$ ***հավասարման բոլոր լուծումների բազմության միավորումն է:***

Օրինակ 1. Լուծենք

$$3x - 7 \geqslant 0 \tag{4}$$

անհավասարումը:

Նախ լուծենք

$$3x - 7 = 0 \tag{5}$$

հավասարումը:

Նրա միակ լուծումն է՝ $x_0 = \dfrac{7}{3}$:

Այնուհետև լուծենք

$$3x - 7 > 0 \tag{6}$$

անհավասարումը:

(6) անհավասարման բոլոր լուծումները $x > \dfrac{7}{3}$ պայմանին բավարարող թվերն են:

Միավորելով (6) անհավասարման և (5) հավասարման բոլոր լուծումների բազմությունները, ստանում ենք, որ (4) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left[\dfrac{7}{3}; +\infty\right)$ կիսաինտերվալ է:

Հաշվի առնելով գծային հավասարումների և անհավասարումների լուծման մեզ արդեն հայտնի ալգորիթմերը՝ գործնականում առաջին աստիճանի ոչ խիստ անհավասարումների լուծումների բազմությունը կարելի է գրել միանգամից, հետևյալ կերպ՝ ցանկացած b և $k > 0$ թվերի համար $kx + b \geqslant 0$ ոչ խիստ անհավասարման բոլոր լուծումներն են $x \geqslant -\dfrac{b}{k}$ պայմանին բավարարող թվերը:

բ) Ցանկացած b և $k < 0$ թվերի համար $kx + b \geqslant 0$ ոչ խիստ անհավասարման բոլոր լուծումներն են $x \leqslant -\dfrac{b}{k}$ պայմանին բավարարող թվերը:

Նույն կերպ գտնվում են նաև $kx + b \leqslant 0$ անհավասարման լուծումները: (Կարելի է նաև այդպիսի անհավասարումները առանձին չքննարկել, որովհետև բազմապատկելով –1-ով՝ այն կարելի է բերել նախորդ տեսքին):

Այն ոչ խիստ անհավասարումները, որոնց ձախ և աջ մասերը x ***փոփոխականի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամներ են կամ թվեր, կոչվում են*** x ***անհայտով առաջին աստիճանի ոչ խիստ գծային անհավասարումներ:***

Հաշվի առնելով գծային հավասարումների և անհավասարումների համարժեք ձևափոխությունների մեզ արդեն հայտնի կանոնները՝ ստանում ենք ոչ խիստ գծային անհավասարումների լուծման հետևյալ ալգորիթմը.

1. *անհայտ պարունակող անդամները տեղափոխում են անհավասարման մի կողմ (օրինակ՝ ձախ կողմ), իսկ թվերը՝ մյուս: Ընդ որում տեղափոխվող անդամների նշանները փոխվում են իրենց հակադիր նշաններով:*
2. *Ձախ և աջ մասերում կատարում են նման անդամների միացում:*
3. *Եթե անհայտի գործակիցը զրոյից տարբեր է, ապա լուծում ենք ստացված ոչ խիստ առաջին աստիճանի հավասարումը վերը նշված եղանակով:*

Իսկ եթե անհայտի գործակիցը 0 է (այլ կերպ ասած x-երը «կրճատվում» են), ապա հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝

$$0 \cdot x \geqslant b, \text{ որտեղ } b > 0: \qquad (1)$$

Պարզ է, որ այս անհավասարմանը չի բավարարում x-ի ոչ մի թվային արժեք, այսինքն անհավասարումը լուծում չունի:

$$0 \cdot x \geqslant b, \text{ որտեղ } b \leqslant 0: \qquad (2)$$

Պարզ է, որ այս անհավասարման լուծում է հանդիսանում ցանկացած թիվ: Նույն կերպ քննարկվում է $0 \cdot x \leqslant b$ դեպքը:

Քննարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x - 3 \leqslant 2x - 1$$

անհավասարումը:

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x - 2 \leqslant -1 + 3,$$

$$-\frac{7}{4}x \leqslant 2,$$

$$x \geqslant -\frac{8}{7}:$$

Պատ.՝ $x \in \left[-\frac{8}{7}; +\infty\right)$:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$4 - 6x \geqslant 9 - 6x$$

անհավասարումը:

$$-6x + 6x \geqslant 9 - 4,$$

$$0 \cdot x \geqslant 5:$$

Պատ.՝ ϕ⌋:

419. ա) Ո՞ր անհավասարումն են անվանում մեկ անհայտով գծային անհավասարում:
բ) Ի՞նչն են անվանում գծային անհավասարման անդամներ:
գ) Ինչպիսի՞ անհավասարումներն են անվանում համարժեք:
դ) Ձևակերպեք անհավասարումների համարժեքության մասին պնդումները:
ե) Ի՞նչ է նշանակում լուծել ոչ խիստ գծային անհավասարումը:

420. Անհավասարումը բերեք $kx + b > 0$ կամ $kx + b < 0$ տեսքի:
ա) $3x - 2 > 7x + 5$; բ) $4 - 6x < 9 - x$;
գ) $7 > 0{,}2x$; դ) $8 - 2(3 - 2x) < 1$:

421. Փակագծերում նշված թիվը հանդիսանո՞ւմ է արդյոք անհավասարման լուծում՝
ա) $4x - 4 > 3x + 3 (-1)$; բ) $2 + 12x < - x + 3 (-2)$;
գ) $5x - 7 > 9 + x (100)$; դ) $72x - 18 < - 13x (-10)$;

422. Համարժե՞ք են արդյոք անհավասարումները՝
ա) $2x - 1 > 6$ և $6 > 2x - 1$; բ) $x < 3$ և $x + 2 < 5$;
գ) $2x > 4$ և $x < 2$; դ) $2x > 5$ և $x - 7 > -2 - x$;
ե) $2 < 7 - x$ և $3x < 5 + 2x$; զ) $3x - 7 > 5$ և $-3x + 7 < - 5$:

Լուծեք անհավասարումը (423-433).

423. ա) $x + 4 > 5x$; բ) $x - 2 < 3x$;
գ) $2x + 1 < x$; դ) $7x - 13 > 9x$:

424. ա) $2x - x - 1 < 2$; բ) $3 < 7x - 5 - 4x$;
գ) $5x - 2x - 8x + x - 12x > 7 - 2x$; դ) $8 - 9x > x - 3 - 3x + 4x + 15$:

425. ա) $x - 2 < x$; բ) $x + 5 > x$;
գ) $6 - 3x > 1 - 3x$; դ) $12 + 4x < 3 - x + 5x$:

426. ա) $x + 2 < x$; բ) $x - 5 > x$;
գ) $4 - 8x < -8x + 4$; դ) $x - 3 + 2x < 4 + 3x - 1$:

427. ա) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x + 5 > \frac{1}{3}x - 1$; բ) $\frac{1}{2}x - 3 < 2 - \frac{1}{3}x$;

գ) $1-\frac{3}{7}x-5<6-\frac{1}{3}x-\frac{2}{21}x;$ դ) $2x-\frac{3}{5}x>1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}x+2;$

ե) $\frac{2}{5}x-1<\frac{3}{4}x-\frac{13}{20};$ զ) $3-\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x<14+\frac{1}{12}x$:

428. ա) $1{,}2-2{,}6x-5>3{,}2x-3;$ բ) $x-1{,}2<0{,}3x+3{,}7;$
գ) $7-0{,}2x<21{,}28-1{,}6x;$
դ) $0{,}8x+0{,}12-0{,}3x>76{,}2-0{,}1x+0{,}6x;$
ե) $1{,}52-2{,}8x<1{,}72-5{,}2x;$
զ) $0{,}014-12{,}5x>1{,}25-0{,}5x+1{,}086-12x$:

429. ա) $2x+(3x-1)>4;$ բ) $x-16<(5-2x)-x-1;$
գ) $2x-(x-1)<3;$ դ) $(2x-3)-(x+1)>1$:

430. ա) $(x+1)-(2x+3)-(1-7x)<x-(8-5x);$
բ) $(3x-11)-(5-9x)+(x-1)>1-4x-(12+x)$:

431. ա) $2(x-1)<4;$ բ) $3(2x-1)>12;$
գ) $4(1+x)<8-4x;$ դ) $25-10x>-5(2x-7)$:

432. ա) $x(2-x)<(3-x)(3+x);$ բ) $3(x-1)(x+1)>3(1+x^2);$
գ) $(x-2)(x-3)+(4-x)(x+2)>0;$
դ) $(2x-1)(x+2)-(x-5)(2x+1)>0$:

433. ա) $\frac{x-1}{3}<1;$ բ) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}>2;$
գ) $\frac{2x}{3}<\frac{x}{4}-1;$ դ) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}>8;$
ե) $\frac{x-4}{5}>2-\frac{x}{3};$ զ) $\frac{2x+1}{4}+2<\frac{3x+2}{3};$
է) $\frac{x-1}{2}-\frac{x}{4}<\frac{x}{6}+\frac{x-2}{3};$ ը) $\frac{7x-2}{4}>1-\frac{x-1}{3}+2\frac{1}{12}x$:

434. −2-ը տված ոչ խիստ անհավասարման լուծո՞ւմ է.
ա) $2+x\geqslant 0;$ բ) $4+2x\leqslant 0;$ գ) $7-x\leqslant 0;$
դ) $9+5x\geqslant 2-3x;$ ե) $4x\geqslant -5+4x;$ զ) $2(1+x)\leqslant 2x$:

Լուծեք ոչ խիստ անհավասարումը.

435. ա) $3{,}1-2x\geqslant 5{,}1-x;$ բ) $3x-6\leqslant(1-3x)-2x+1;$
գ) $(2x-1)-(5-3x)\geqslant 2-5x;$ դ) $(x-2)(x+2)\leqslant 4-x+x^2$:

436. ա) $\dfrac{2x+1}{5} \geqslant 2$; բ) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{x}{6} \leqslant 1$;

գ) $\dfrac{4x+3}{2} \geqslant 2 - \dfrac{2x-1}{3}$; դ) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} \leqslant 5$:

437. Համարժե՞ք են արդյոք անհավասարումները.
ա) $3 - 2x \geqslant 1$ և $6 - 4x \geqslant 2$; բ) $4 + x \leqslant x$ և $x < x$;
գ) $7 - 3x \geqslant -3x$ և $x \geqslant x$; դ) $3 + 2x \geqslant 0$ և $6 + 4x > 0$:

438. Կարո՞ղ է արդյոք մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարումը
ա) ճիշտ լինել անհայտի ցանկացած արժեքի համար:
բ) լուծումներ չունենալ:

439. Կարո՞ղ է արդյոք մեկ անհայտով գծային անհավասարումը
ա) ճիշտ լինել անհայտի ցանկացած արժեքի համար,
բ) լուծումներ չունենալ:

4.6 Մեկ անհայտով գծային անհավասարումների համակարգեր

Եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն x թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը միաժամանակ հանդիսանում է տված մի քանի մեկ անհայտով գծային անհավասարումների կամ ոչ խիստ անհավասարումների լուծում, ապա ասում են, որ պետք է լուծել ***մեկ*** x ***անհայտով գծային անհավասարումների համակարգ:***

Գծային անհավասարումների համակարգը լուծելու համար, պետք է լուծել այդ համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարումը և այնուհետև գտնել ստացված լուծումների բազմությունների ընդհանուր մասը (հատումը), դա էլ հենց կհանդիսանա տվյալ համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը:

Սովորաբար համակարգի անհավասարումները գրում են իրար տակ՝ սյունով, և ձախից դնում ձևավոր փակագծի նշան:

Դիտարկենք անհավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ:

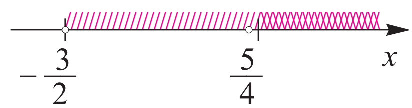
ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ -4x + 5 < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

անհավասարումների համակարգը:

Լուծելով (1) համակարգի առաջին անհավասարումը՝ կստանանք, որ նրա բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ միջակայքն է: Լուծելով (1) համակարգի երկրորդ անհավասարումը՝ ստանում ենք, որ նրա բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$ միջակայքն է: Այժմ գտնենք x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում (1) համակարգի երկու անհավասարումներն էլ միաժամանակ դառնում են ճիշտ թվային անհավասարություններ, այսինքն գտնենք $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$ և $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ միջակայքերի ընդհանուր մասը: Դրա համար Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք այդ երկու միջակայքերը: Նկար 25-ից երևում է, որ այդ միջակայքերի ընդհանուր մասը $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ միջակայքն է:

Հետևաբար (1) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ միջակայքն է:



Նկ. 25

Պատասխան՝ $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$\begin{cases} 5x - 23 < 0, \\ 12x - 13 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2)$$

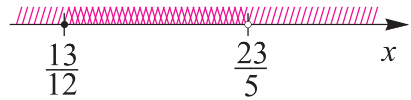
անհավասարումների համակարգը:

Լուծելով (2) համակարգի անհավասարումներից յուրաքանչյուրը՝ գտնում ենք, որ առաջին անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է այնպիսի x թվերից, որոնք փոքր են $\frac{23}{5}$-ից $\left(x < \frac{23}{5}\right)$, իսկ երկրորդի բոլոր լուծումների բազմությունը՝ այնպիսի x թվերից, որոնց համար $x \geqslant \frac{13}{12}$:

(2) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը կլինի բոլոր այն x թվերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար (2) համակարգի երկու անհավասարումները միաժամանակ դառնում են ճիշտ թվային անհավասարություններ: Հետևաբար դրանք կլինեն այն x-երը, որոնք մեծ են կամ հավասար $\frac{13}{12}$-ից, բայց փոքր են $\frac{23}{5}$-ից, այսինքն $\frac{13}{12} \leqslant x < \frac{23}{5}$ միջակայքի բոլոր թվերը՝ (նկ. 26)

Այսպիսով, (2) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը $\left[\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right]$ միջակայքն է:

Պատասխան՝ $\left[\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$:



Նկ. 26

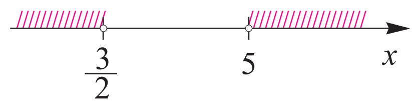
ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 2x - 3 < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

անհավասարումների համակարգը:

(3) համակարգի առաջին անհավասարման լուծումները բոլոր $x > 5$ թվերն են, իսկ երկրորդի լուծումները՝ բոլոր $x < \frac{3}{2}$ թվերը:

Ուստի (3) համակարգի լուծումներ կարող են լինել միայն այն x թվերը, որոնք մեծ են 5-ից, բայց փոքր են $\frac{3}{2}$-ից: Պարզ է, որ այդպիսի x թվեր չկան (նկ. 27):



Նկ. 27

Հետևաբար (3) համակարգը լուծումներ չունի:

Պատասխան՝ լուծումներ չկան ⌈(սեղմության համար այս բառերի փոխարեն սովորաբար գրում են՝ ϕ):⌋

Անհավասարումների համակարգը երբեմն կարելի է գրել կրկնակի անհավասարման տեսքով:

Օրինակ՝

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x + 5 < 7 \end{cases} \qquad (4)$$

անհավասարումների համակարգը կարելի է գրել

$$0 < 2x - 5 < 7 \qquad (5)$$

կրկնակի անհավասարման տեսքով:

Այդ իսկ պատճառով կրկնակի անհավասարումը կարելի է լուծել երկու եղանակով:

I եղանակ. (5) կրկնակի անհավասարումը գրենք (4) համակարգի տեսքով և լուծենք այդ համակարգը՝

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x > 5, \\ 2x < 7 + 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2{,}5, \\ x < 6, \end{cases}$$

այսինքն $2{,}5 < x < 6$:

II եղանակ. Լուծում ենք (5) կրկնակի անհավասարումը՝

$$5 < 2x < 7 + 5,$$
$$2{,}5 < x < 6:$$

Հետևաբար (5) կրկնակի անհավասարման լուծումները կազմում են (2,5; 6) միջակայքը:

Պատասխան՝ (2,5 ; 6):

Նկատենք, որ իրականում կրկնակի անհավասարման լուծման երկրորդ եղանակը առաջին եղանակի կարճ գրելաձևն է:

440. Ի՞նչ է նշանակում լուծել մեկ անհայտով գծային անհավասարումների համակարգը:

441. Գտեք անհավասարումների գոնե մեկ ընդհանուր լուծում՝
ա) $x > 3$ և $x > 2$;
բ) $x < -2$ և $x < -1$;
գ) $x + 1 > 0$ և $x - 1 > 0$;
դ) $x - 2 < 0$ և $x + 2 < 0$;
ե) $2x > -4$ և $x + 2 < 0$;
զ) $3x < 9$ և $x + 3 > 0$:

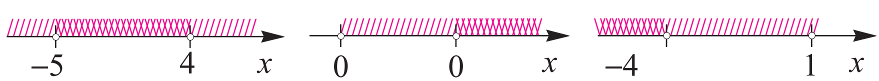
Կոորդինատային ուղղի վրա նշեք անհավասարումների համակարգի բոլոր լուծումները (եթե դրանք գոյություն ունեն)՝ (442-444):

442. ա) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 1; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x > 0, \\ x > 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -5: \end{cases}$

443. ա) $\begin{cases} x < 7, \\ x < 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x < -1, \\ x < 3; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x < -5, \\ x < 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x < -10, \\ x < -16: \end{cases}$

444. ա) $\begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x < -5, \\ x > -7; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x > 4, \\ x < 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -5: \end{cases}$

445. Գրեք մի որևէ անհավասարումների համակարգ, որի բոլոր լուծումների բազմությունը նկ. 28-ում պատկերված է կրկնակի ստվերագծերով՝



ա) բ) գ)

Նկ. 28

446. Փակագծերում նշված թիվը հանդիսանու՞մ է արդյոք անհավասարումների համակարգի լուծում՝

ա) $\begin{cases} 2x+3>0, \\ 7-4x>0 \end{cases}$ (-1); բ) $\begin{cases} 5x>10, \\ 6x+1<0 \end{cases}$ (3);

⌈գ) $\begin{cases} 8-x<0, \\ 3x \geqslant 3 \end{cases}$ (2); դ) $\begin{cases} 7x-10 \leqslant 0, \\ 3x+1 \geqslant 0 \end{cases}$ $(0{,}6)$:⌋

447. $2x<1$ անհավասարման համար ընտրեք ևս մեկ անհավասարում այնպես, որ ստացված անհավասարումների համակարգը՝
ա) լուծումներ չունենա,
բ) բոլոր լուծումների բազմությունը լինի $(-\infty;\ 0{,}5)$ միջակայքը:

Լուծեք անհավասարումների համակարգը (448-452).

448. ա) $\begin{cases} 3>x, \\ x<4; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 4x<15, \\ -7<x+5; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 6x>6, \\ 1>3-2x; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 6-2x>5, \\ 3-2x>1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x-4>0, \\ 2x-8>0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 5x+3<8, \\ 7-3x>2; \end{cases}$ է) $\begin{cases} 2x-1>3x+1, \\ 5x-1>13; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 7x<x-6, \\ 2>5+3x: \end{cases}$

449. ա) $\begin{cases} 2x+7>3-x, \\ \dfrac{1}{3}x-1>2x-\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x>8, \\ \dfrac{3}{4}x-1>\dfrac{3}{5}x-1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}<1, \\ 4-x>\dfrac{x-5}{3}; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3}>\dfrac{3-x}{2}, \\ \dfrac{x}{7}-1<\dfrac{2-8x}{4}: \end{cases}$

⌈450. ա) $\begin{cases} 3-2x \geqslant 0, \\ 4+x \leqslant 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 7+5x \geqslant 2, \\ 2+3x \leqslant 10; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 8-2x \geqslant 0, \\ 6x \geqslant 24; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2-5x}{3} \geqslant \dfrac{7-x}{2}, \\ \dfrac{-4-x}{5} \leqslant 2-\dfrac{-x}{5}: \end{cases}$

451. ա) $\begin{cases} 6+x>3-2x, \\ 4-x \leqslant -2x+3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 5-2x \geqslant 2(1-x), \\ \dfrac{7+3x}{4}>\dfrac{x}{2}-1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3-x}{4} \geqslant \dfrac{1-x}{2}-x, \\ 5-3x < (x-1)(x+1)-x^2; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x-3 \leqslant \dfrac{4}{3}x-2, \\ 4(1+3x) < 9-2x: \end{cases}$

452. Կրկնակի անհավասարումը լուծեք երկու եղանակով.

ա) $0 < 3x < 2$; բ) $-1 < \dfrac{2}{7}x \leqslant 8$;

գ) $1 < x + 4 < 2$; դ) $-7 < x - 6 < -2$;

ե) $0 \leqslant 3x - 7 < 3$; զ) $-8 < 0{,}5x + 1 < 4$:

4.7 Մեկ անհայտով գծային հավասարումների և անհավասարումների համախմբեր

Դիցուք տրված են x անհայտով մի քանի գծային հավասարումներ և անհավասարումներ կամ միայն հավասարումներ (անհավասարումներ):

Եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն x թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է դրանցից գոնե մեկի լուծում, ապա ասում են, որ պետք է լուծել ***մեկ x անհայտով համախումբ:***

Լուծել համախումբը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ցույց տալ, որ լուծումներ չկան:

Համախումբը լուծելու համար պետք է լուծել այդ համախմբի յուրաքանչյուր հավասարումը կամ անհավասարումը և այնուհետև գտնել ստացված լուծումների բազմությունների միավորումը, դա էլ հենց կհանդիսանա տվյալ համախմբի բոլոր լուծումների բազմությունը:

Սովորաբար համախմբի հավասարումները և անհավասարումները գրում են իրար տակ՝ սյունով, և ձախից դնում քառակուսի փակագծի նշան:

Ասում են, որ *հավասարումը (անհավասարումը) համարժեք է համախմբի,* եթե հավասարման (անհավասարման) յուրաքանչյուր լուծում համախմբի լուծում է, իսկ համախմբի յուրաքանչյուր լուծում հավասարման (անհավասարման) լուծում է: Նման կերպ սահմանվում են հավասարման (անհավասարման) և համակարգի, ինչպես նաև համախմբերի համարժեքությունը:

Դիտողություն: Երբեմն համարժեքությունը գրառելու համար օգտագործում են համարժեքության $\Leftrightarrow$ նշանը:

Ինչպես վերը նշվեց, համախումբը կարող է նաև բաղկացած լինել միայն հավասարումներից կամ միայն անհավասարումներից:

Դիտարկենք համախմբերի լուծման օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}5x-2<3,\\ 4x+3\geqslant 0\end{array}\right. \qquad (1)$$

համախումբը:

Լուծում՝

$$\left[\begin{array}{l}5x<5,\\ 4x\geqslant -3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x<1,\\ x\geqslant -\dfrac{3}{4};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;\ 1),\\ x\in[-\dfrac{3}{4};\ +\infty]:\end{array}\right.$$

Ըստ երկու բազմությունների միավորման սահմանման՝

$$(-\infty;\ 1)\cup[-\frac{3}{4};\ +\infty]=(-\infty;\ +\infty):$$

Պատ. (1) համախմբի լուծումների բազմությունը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է՝ R:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}2x\geqslant 1,\\ 4x\geqslant 5\end{array}\right.$$

համախումբը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}x\geqslant \dfrac{1}{2},\\ x\geqslant \dfrac{5}{4};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x\in\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right],\\ x\in\left[\dfrac{5}{4};\ +\infty\right]:\end{array}\right.$$

$$\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)\cup\left[\frac{5}{4};\ +\infty\right)=\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right):$$

Պատ.՝ $x\in\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$:

Օրինակ 3. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}4x-3>1,\\ 5x-4\leqslant 1\end{array}\right.$$

համախումբը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}4x>4,\\ 5x\leqslant 5;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x>1,\\ x\leqslant 1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x\in(1;\ +\infty),\\ x\in(-\infty;\ 1]:\end{array}\right.$$

$$(-\infty;\ 1]\cup(1;\ +\infty)=(-\infty;\ +\infty):$$

Պատ.՝ $x\in$ R:

Օրինակ 4. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}2x-5=0,\\x+1<0\end{array}\right.$$

համախումբը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}2x=5,\\x<-1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2},\\x<-1:\end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x\in(-\infty;\,-1)\cup\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$:

Օրինակ 5. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}4+2x=0,\\7-3x=0,\\x-8>0\end{array}\right.$$

համախումբը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}2x=-4,\\-3x=-7,\\x>8;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=\dfrac{7}{3},\\(8;\,+\infty):\end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x\in\left\{-2;\,\dfrac{7}{3}\right\}\cup(8;\,+\infty)$:

Օրինակ 6. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}6-3x=-x,\\2(x-1)\leqslant 2x-2\end{array}\right.$$

համախումբը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}6-3x=-x,\\2x-2x\leqslant -2+2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=3,\\0\cdot x\leqslant 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=3,\\x\in(-\infty;\,+\infty):\end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x\in\{3\}\cup(-\infty;\,+\infty)=(-\infty;\,+\infty)$:

Օրինակ 7. Լուծենք

$$\left[\begin{array}{l}3x-1=3(x-2),\\\dfrac{1+x}{4}>2\end{array}\right.$$

համախումբը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}3x-3x=-6+1,\\x>8-1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}0\cdot x=-5,\\x>7;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\phi,\\(7;\,+\infty):\end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x\in(7;\,+\infty)$:

453. 2, 3, –5 թվերից ո՞րն է հետևյալ համախմբի լուծում.

ա) $\left[\begin{array}{l}4-4x<0,\\ 7x-1>2;\end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l}2+5x\leqslant 0,\\ x>2,\\ 3x=0;\end{array}\right.$ գ) $\left[\begin{array}{l}4-3x<x,\\ 6+6x>7-7x:\end{array}\right.$

454. Լուծեք համախումբը.

ա) $\left[\begin{array}{l}3(1+x)-2<5(2-5x)-3x,\\ 2(4-x)-3>4x-7;\end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l}2(3y-1)-1\geqslant 4-5y,\\ 6y-6\leqslant 6(y-1);\end{array}\right.$

գ) $\left[\begin{array}{l}3x+3>3(x+1),\\ 2x-2<2(x-1);\end{array}\right.$ դ) $\left[\begin{array}{l}4-4x\geqslant 4(1-x),\\ 5x+1<5x-1;\end{array}\right.$

ե) $\left[\begin{array}{l}3(2-z)-5z<-4(27-3)+z,\\ 6(z-3)\geqslant 4z+3;\end{array}\right.$ զ) $\left[\begin{array}{l}x\leqslant x+5,\\ 4x-3>3-4x;\end{array}\right.$

է) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1+x}{3}-\dfrac{x}{2}=5,\\ \dfrac{4-7x}{2}>-1;\end{array}\right.$ ը) $\left[\begin{array}{l}2x=1,\\ 3+x=5-\dfrac{x}{2},\\ 2(1-x)=5-2x;\end{array}\right.$

թ) $\left[\begin{array}{l}10-2x=\dfrac{3+x}{3},\\ 4x=0;\end{array}\right.$ ժ) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{2-5x}{2}=-1,\\ 3(x-2)\leqslant 1+3x,\\ 2x>2-3x:\end{array}\right.$

455. Ապացուցեք, որ եթե

ա) x_0-ն $\left[\begin{array}{l}k_1x+b_1<0,\\ k_2x+b_2>0\end{array}\right.$ համախմբի լուծում չէ,

ապա $\begin{cases}k_1x+b_1\geqslant 0,\\ k_2x+b_2\leqslant 0\end{cases}$ համակարգի լուծում է:

բ) x_0-ն $\left[\begin{array}{l}k_1x+b_1\geqslant 0,\\ k_2x+b_2>2\end{array}\right.$ համախմբի լուծում է,

ապա $\begin{cases}k_1x+b_1<0,\\ k_2x+b_2\leqslant 2\end{cases}$ համակարգի լուծում չէ:⌋

4.8 Մոդուլի (բացարձակ արժեքի) նշան պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծումը

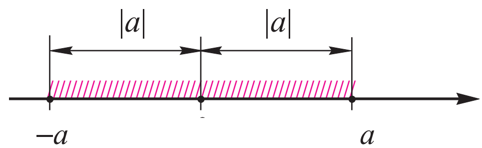
Նախ, վերհիշենք, որ a թվի մոդուլ (բացարձակ արժեք) կոչվում է $|a|$ թիվը, որը հավասար է a-ի, եթե a-ն ոչ բացասական է և հավասար է $-a$, եթե a-ն ոչ դրական է, այսինքն

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ եթե } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ եթե } a \leqslant 0: \end{cases}$$

Օրինակ՝ $|7| = 7$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$:

Սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած թվի բացարձակ արժեքը ոչ բացասական թիվ է: Ավելի ճիշտ, զրոյից տարբեր a թվի բացարձակ արժեքը դրական թիվ է, իսկ զրոյի բացարձակ արժեքը զրո է:

Եթե թվային ուղղի վրա նշենք a և $-a$ թվերը ($a \neq 0$), ապա $|a|$-ն այդ թվերից ցանկացածի հեռավորությունն է զրո կետից (նկ. 29-ում a-ն դրական թիվ է, $-a$-ն՝ բացասական):



Նկ. 29

Հաշվի առնելով ասվածը՝ ստանում ենք, որ

$$|x| = \mathrm{A} \qquad (1)$$

հավասարումը $\mathrm{A} < 0$ դեպքում լուծում չունի, $\mathrm{A} = 0$ դեպքում ունի միակ լուծում՝ $x = 0$, իսկ $\mathrm{A} > 0$ դեպքում՝ ճիշտ երկու լուծում՝ $x = \mathrm{A}$ և $x = -\mathrm{A}$:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$|2 - 3x| = 5$$

հավասարումը:

Ինչպես նշեցինք, այս հավասարումը համարժեք է հետևյալ համախմբին՝

$$\left[\begin{array}{l} 2 - 3x = 5, \\ 2 - 3x = -5; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = \dfrac{7}{3}: \end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x = -1$, $x = \dfrac{7}{3}$:

Ելնելով մոդուլի երկրաչափական մեկնաբանությունից՝ տեսնում ենք, որ $\mathrm{A} > 0$ դեպքում

$$|x| < \mathrm{A} \text{ (կամ } \leqslant \mathrm{A}) \qquad (2)$$

անհավասարմանը բավարարում են միայն $-\mathrm{A} < x < \mathrm{A}$ (կամ $-\mathrm{A} \leqslant x \leqslant \mathrm{A}$) պայմանին բավարարող թվերը, և հակառակը, այդ պայմանին բավարարող թվերը հանդիսանում են (2) անհավասարման լուծում: Այլ կերպ ասած, (2) անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x < A, \\ x > -A \end{cases}$$

համակարգին:

A > 0 դեպքում

$$|x| > A \text{ (կամ } \geqslant A) \qquad (3)$$

անհավասարմանը բավարարում են այն և միայն այն x թվերը, որոնք բավարարում են $x > A$ $(\geqslant A)$ կամ $x < -A$ $(\leqslant -A)$ պայմաններին: Այլ կերպ ասած (3) անհավասարումը համարժեք է

$$\left[\begin{array}{l} x > A, \\ x < -A \end{array}\right.$$

համախմբին:

Մոդուլի սահմանումից անմիջապես հետևում է նաև, որ $A < 0$ դեպքում $|x| < A$ (կամ $\leqslant A$) անհավասարումը լուծում չունի, իսկ $|x| > A$ (կամ $\geqslant A$) անհավասարման լուծում է հանդիսանում ցանկացած թիվ:

Պարզ է նաև, որ $|x| > 0$ անհավասարման լուծումներն են զրոյից տարբեր բոլոր թվերը, իսկ $|x| < 0$ անհավասարումը լուծում չունի:

Օրինակներ.

1.° Լուծենք $|6 + 5x| > 2$ անհավասարումը՝

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l} 6 + 5x > 2, \\ 6 + 5x < -2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > -\dfrac{4}{5}, \\ x < -\dfrac{8}{5}: \end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{8}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$:

2. Լուծենք $|4 - 4x| \leqslant 0$ անհավասարումը:

Լուծում:

Մոդուլի սահմանումից հետևում է, որ այստեղ հնարավոր է միայն

$$4 - 4x = 0$$

դեպքը:

Պատ.՝ $x = 1$:

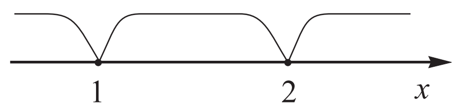
3. Լուծենք $|7 - 2x| \leqslant 2$ անհավասարումը:

Ըստ վերը ասվածի՝ այս անհավասարումը համարժեք է
$$\begin{cases} 7 - 2x \leqslant 2, \\ 7 - 2x \geqslant -2 \end{cases}$$
համակարգին, որը լուծելով ստանում ենք $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right]$ պատասխանը:

Մոդուլի նշան պարունակող ավելի ընդհանուր տեսքի հավասարումների և անհավասարումների լուծման համար կիրառվում է ***միջակայքերի եղանակը,*** որի իմաստը այն է, որ այս կամ այն դատողություններով կոորդինատային առանցքը տրոհվում է ինչ-որ քանակի միջակայքերի, այնուհետև դրանց վրա հետազոտվում է դիտարկվող խնդիրը:

Օրինակ 1. Լուծենք
$$|x-1| + |x-2| = 6 \qquad (5)$$
հավասարումը:

Նախ լուծենք $x - 1 = 0$ և $x - 2 = 0$ հավասարումները և կոորդինատային առանցքի վրա նշենք ստացված $x_1 = 1$ և $x_2 = 2$ թվերը (նկ. 30):



Նկ. 30

Կստանանք $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$ և $[2; +\infty)$ միջակայքերը (կարելի է դիտարկել նաև $(-\infty; 1]$, $[1; 2]$ և $[2; +\infty)$ միջակայքերը. այլ կերպ ասած, կարևոր չէ, թե 1 և 2 կետերը որ միջակայքերի ծայրակետեր են դիտարկվում):

(5) հավասարումը լուծենք այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

1) $(-\infty; 1)$ միջակայքում, ըստ մոդուլի սահմանման՝
$$|x-1| = -(x-1), \; |x-2| = -(x-2),$$
(քանի որ $x < 1$), հետևաբար այդ միջակայքում (5) հավասարումը համարժեք է $-(x-1) - (x-2) = 6$ հավասարմանը, որն ունի $x_0 = -1{,}5$ միակ արմատը: Այդ թիվը պատկանում է $(-\infty; 1)$ միջակայքին, ուրեմն (5) հավասարումը դիտարկվող միջակայքում ունի $x_0 = -1{,}5$ միակ արմատը:

2) $[1; 2)$ միջակայքում, ըստ մոդուլի սահմանման,
$$|x-1| = x-1, \; |x-2| = -(x-2)$$
(քանի որ $x - 1 \geqslant 0$, $x - 2 < 0$), հետևաբար այդ միջակայքում (5) հավասարումը համարժեք է $x - 1 - (x - 2) = 6$ հավասարմանը, որը լուծում չունի:

3) $[2; +\infty]$ միջակայքում, ըստ մոդուլի սահմանման,
$$|x-1| = x-1, \; |x-2| = x-2$$
(քանի որ $x - 1 > 0$, $x - 2 \geqslant 0$), հետևաբար այդ միջակայքում (5) հավասարումը համարժեք է $x - 1 + x - 2 = 6$ հավասարմանը, որն ունի $x_0 = 4{,}5$ միակ լուծումը: Այդ թիվը պատկանում է $[2; +\infty)$ միջակայքում, ուրեմն (5) հավասարումը դիտարկվող միջակայքում ունի միակ $x_0 = 4{,}5$ արմատը:

Այսպիսով, սկզբնական հավասարումն ունի երկու արմատ՝

$$x_1 = -\,1{,}5 \text{ և } x_2 = 4{,}5:$$

Պատասխան՝ −1,5 և 4,5:

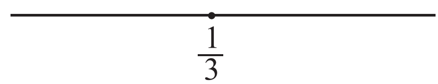
Նման ձևով լուծում են նաև մոդուլի նշան պարունակող անհավասարումները:

Օրինակ. Լուծենք

$$2|1-3x| > 9+4x \qquad (6)$$

անհավասարումը:

Նախ լուծենք $1-3x=0$ հավասարումը և կոորդինատային ուղղի վրա նշենք այդ հավասարման $x=\frac{1}{3}$ արմատը (նկ. 31):



Նկ. 31

Կստանանք $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ և $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ միջակայքերը:

$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ միջակայքում $1-3x \geqslant 0$, ուստի, ըստ մոդուլի սահմանման,

$$|1-3x| = 1-3x$$

Հետևաբար այդ միջակայքում (6) անհավասարումը համարժեք է

$$2(1-3x) > 9+4x$$

անհավասարմանը: Ուստի պետք է լուծել այս անհավասարումը և նրա լուծումների բազմությունից առանձնացնել

$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ միջակայքին պատկանող կետերը: Այն կերպ ասած, պետք է լուծել հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2-6x > 9+4x: \end{cases}$$

Դա կատարելով՝ ստանում ենք՝ $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{10}\right)$:

2) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ միջակայքում $1-3x \leqslant 0$, ուստի, ըստ մոդուլի սահմանման,

$$|1-3x| = -\,(1-3x),$$

և ստանում ենք

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3}, \\ 2-6x > 9+4x \end{cases}$$

համակարգը, որի լուծումների բազմությունը $\left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$ միջակայքն է:

Մնում է միավորել ստացված երկու լուծումները:

Պատ.՝ $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$:

456. Թվային ուղղի վրա նշեք հետևյալ միջակայքերը.
ա) $|x| < 2$, բ) $|x| > 1$,
գ) $|x| \leqslant 1{,}5$, դ) $|x| \geqslant 0{,}2$:

457. Լուծեք հավասարումը.
ա) $|x| = 9$, բ) $|x| = 1{,}5$, գ) $|x - 1| = 2$,
դ) $|x - 2| = 1$, ե) $|x + 3| = 1$, զ) $|x + 1| = 3$:

458. ա) $|2x - 1| = 5$, բ) $|3x + 2| = 4$,
գ) $|7 - 3x| = 4$, դ) $|-2 - 3x| = 5$:

459. ա) $|x| = x + 2$, բ) $|x| = 2x + 1$,
գ) $|x - 3| = 3x$, դ) $|x + 2| = 2x$:

460. Լուծեք հավասարումը՝
ա) $|1 + 3x| - |x - 1| = 2 - x$, բ) $|x| + |-x| = 2x$,
գ) $|2 + x| + |-2 - x| = 4 + 2x$,

461. Լուծեք անհավասարումը.
ա) $|3x - 6| > x + 2$, բ) $|2x - 5| < x - 1$,
գ) $|3x - 7| > 2x - 3$, դ) $|2x - 7| \leqslant 0{,}5x + 2$:

462. ա) $|x - 1| + 10 \geqslant 8|x - 1| + 6$, բ) $|x - 2| + 8 < 9|x - 2| + 3$,
գ) $|x - 3| + 6 \leqslant 8|x - 3| + 4$, դ) $|x - 2| + 7 > 3|x - 2| + 2$:

463. ա) $|x + 1| + |x + 3| \leqslant 8$, բ) $|x + 2| + |x + 4| < 6$,
գ) $|x + 3| + |x - 2| > 5$, դ) $|x + 7| + |x + 1| \geqslant 9$:

464. Լուծեք հավասարումը.
ա) $|x - 1| = 2x + 4$, բ) $|x - 2| = 2x + 1$,
գ) $|x - 1| + |x + 1| = 4$, դ) $|x - 3| + |x + 3| = 8$,
ե) $|x - 1| + |x - 3| = 2$, զ) $|x + 1| + |x - 5| = 7$:

465. ա) $|x - 1| = x - 1$, բ) $|x - 2| = 2 - x$:

466. Գրեք հավասարումների համախումբ, որը համարժեք է հավասարմանը.

ա) $|x| = 5$, բ) $|x| = 4$:

467. Գրեք անհավասարումների համախումբ, որը համարժեք է անհավասարմանը՝

ա) $|x| > 5$, բ) $|x| > 4$:

468. Գրեք անհավասարմանը համարժեք անհավասարումների համակարգ.

ա) $|x| < 5$, բ) $|x| \leqslant 4$:

469. Գրեք մոդուլի նշան պարունակող անհավասարում, որի լուծումների բազմությունն է՝

ա) $(-2; 2)$, բ) $[-6; 6]$,
գ) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, դ) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$:

470. Լուծեք հավասարումը.

ա) $|x| = |-x|$, բ) $|2 + 5x| + |-x| = -1$,
գ) $2|x - 3| + |x - 3| = 0$:

471. Լուծեք անհավասարումը.

ա) $|3x - 2| \leqslant 0$, բ) $|4 - 5x| > 0$,
գ) $|7 - x| \geqslant 0$, դ) $|3 - 2x| \leqslant -6$,
ե) $|4 + 4x| \geqslant -5$:

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ

$$\sqrt{a^2} = |a|,\ a \in \mathrm{R}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a\ (a \geqslant 0)$$
$$\dots$$

5.1 $y = x^2$ ֆունկցիաների հատկությունները և գրաֆիկը

Հաշվի առնելով, որ այս ֆունկցիան հետագայում հանրահաշվի դասընթացում կարևոր նշանակություն է ունենալու, կատարենք նրա մանրամասն հետազոտում:

x փոփոխականի թույլատրելի արժեքների բազմությունը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է կամ, ինչպես ընդունված է ասել, $y = x^2$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է՝ R-ը:

Քանի որ ցանկացած իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական թիվ է, ապա y-ը ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ:

Ձևակերպենք և հիմնավորենք $y = x^2$ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ:

1) ***Եթե*** $x = 0$, ***ապա*** $y = 0$:

Այս հատկությունը ակնհայտ է:

2) ***Եթե*** $x > 0$, ***ապա*** $y > 0$:

Իրոք, եթե $x > 0$, ապա $y = x^2 = x \cdot x$-ը երկու դրական թվերի արտադրյալ է: Դրա համար էլ $y > 0$:

3) x-***ի ոչ բացասական արժեքների համար*** $y = x^2$ ***ֆունկցիան աճում է, այսինքն*** x-***ի մեծ արժեքին համապատասխանում է*** y-***ի մեծ արժեք: Այլ կերպ ասած, եթե*** x_1-***ը և*** x_2-***ը ոչ բացասական թվեր են և*** $x_1 < x_2$, $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, ***ապա*** $y_1 < y_2$:

Իրոք, եթե $x_1 = 0$ և $x_1 < x_2$, ապա $x_1^2 = 0$, իսկ $x_2^2 > 0$՝ ըստ անհավասարությունների հայտնի հատկության, այսինքն $x_1^2 < x_2^2$ կամ որ նույնն է՝ $y_1 < y_2$:

Իսկ եթե $x_1 > 0$ և $x_1 < x_2$, ապա նորից ըստ x_1 և x_2 դրական թվերի մասին անհավասարությունների հայտնի հատկության, $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է $x_1^2 < x_2^2$ անհավասարությունը, այսինքն $y_1 < y_2$:

4) Եթե x դրական թիվը, անսահմանափակ աճելով, ձգտում է $+\infty$, ապա նաև $y = x^2$-ն ձգտում է $+\infty$, այսինքն՝

$$y \to +\infty, \text{ եթե } x \to +\infty:$$

Իրոք, դիցուք x-ը ձգտում է $+\infty$՝ ընդունելով $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ...բնական արժեքները: Այդ դեպքում $y = x^2$-ն համապատասխանաբար կընդունի $n^2 = 1, 4, 9, 16, 25$ .... արժեքները և, ակնհայտ է, նույնպես ձգտում է $+\infty$:

x-ի միջանկյալ (ոչ ամբողջ) արժեքների համար նույնպես այդ հատկությունը ճիշտ է:

5) ***x-ի նշանը փոխելով հակառակ նշանով՝ նրան համապատասխանող $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքը չի փոխվում, այսինքն*** $y(-x) = y(x)$:

Իրոք, $(-x)^2 = x^2$ ցանկացած x իրական թվի համար: Այսպիսի հատկությամբ օժտված ֆունկցիան անվանում են ***զույգ ֆունկցիա:*** Այսպիսով, $y = x^2$ ֆունկցիան զույգ ֆունկցիա է:

6) $y = x^2$ ***ֆունկցիան անընդհատ է,*** այսինքն x-ի փոքր փոփոխմանը համապատասխանում է y-ի փոքր փոփոխություն:

Այս փաստը դրական x-երի համար դառնում է ակնհայտ, եթե համարենք, որ y-ը x կողմով քառակուսու մակերեսն է: Պարզ է, որ քառակուսու կողմի փոքր փոփոխությունը բերում է նրա մակերեսի փոքր փոփոխության:

Այս հիմնական հատկություններից, որպես հետևանք, հեշտությամբ կարելի է հիմնավորել նաև հետևյալ հատկությունները՝

ա) ***եթե*** $x < 0$, ***ապա*** $y > 0$,

բ) ***եթե*** $x \to -\infty$, ***ապա*** $y \to +\infty$,

գ) ***x-ի ոչ բացասական արժեքների համար*** $y = x^2$ ***ֆունկցիան նվազում է,*** այսինքն x-ի մեծ ոչ բացասական արժեքին, համապատասխանում է y-ի փոքր արժեք, այսինքն $x_1 < x_2 \leqslant 0$ պայմանից հետևում է, որ $x_1^2 > x_2^2$:

Ինչպես գիտենք, $y = x^2$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկը*** xOy ***կոորդինատային հարթության*** $(x; x^2)$ ***կոորդինատներով կետերի բազմությունն է, որտեղ x-ը ցանկացած իրական թիվ է:***

$$y = x^2 \qquad (1)$$

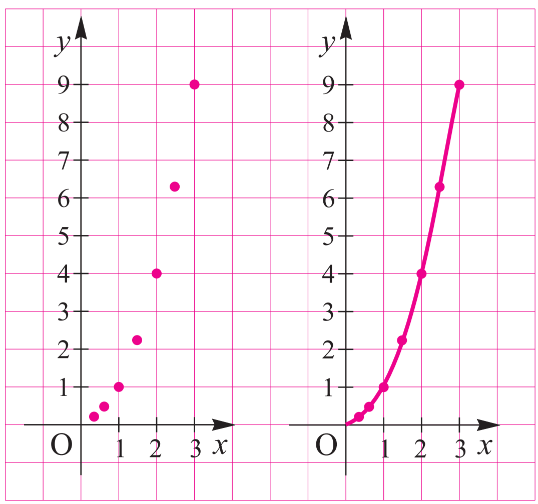
ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է ամեն մի x իրական թվի համար (1) բանաձևով հաշվել y-ի համապատասխան արժեքը և ստացված $(x; y)$ կետերը նշել տրված դեկարտյան կոորդինատային համակարգում: Այդ կետերի բազմությունն էլ հենց կլինի $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Սակայն այդ աշխատանքը մինչև վերջ հնարավոր չէ կատարել, քանի որ նշված կետերի քանակը անվերջ է: Այնուհանդերձ $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է կառուցել մոտավորապես:

Նշենք x-ի մեծ թվով տարբեր դրական արժեքներ և ըստ (1) բանաձևի հաշվենք y-ի նրան համապատասխանող արժեքները: Ստորև բերված է [0; 3] միջակայքից x-ի որոշակի արժեքներին համապատասխանող աղյուսակ՝

x	0	0,3	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,09	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Աղյուսակի (x; y) թվազույգերին համապատասխանող կետերը նշենք տրված xOy կոորդինատային համակարգում: Ստացվում է Ox առանցքի [0; 3] միջակայքից վերև դասավորված կետերի բազմություն (նկ. 32):



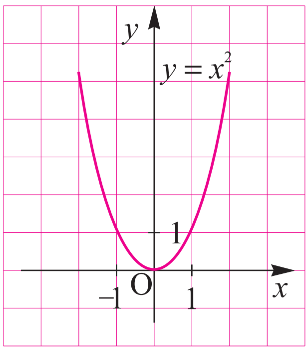
Նկ. 32 Նկ. 33

Միացնենք այդ կետերը սահուն անընդհատ գծով (ինչպես ընդունված է ասել, «առանց գրիչի ծայրը թղթից կտրելու»), այնպես որ նրա ընթացիկ կետի y օրդինատը աճի աբսցիսի աճմանը զուգընթաց (նկ. 33): Ստացված անընդհատ գիծը կարելի է դիտարկել որպես $y = x^2$ ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկ x-ի փոփոխման [0; 3] միջակայքում:

Նշենք, որ նկ. 33-ում պատկերված գրաֆիկը արտացոլում է $y = x^2$ ֆունկցիայի վերը նշված 1, 2, 3, 6 հատկությունները:

6-րդ հատկությունը ցուցանշում է այն, որ $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պետք է իրենից ներկայացնի անընդհատ գիծ: Դրա համար էլ մենք նկ. 32-ում ստացված կետերը իրար միացրինք անընդհատ գծով:

Հեշտ է պատկերացնել, թե ինչ տեսք ունի $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը x-ի մեծ դրական արժեքների համար: Եթե այդ գրաֆիկի կետի աբսցիսը ձգտում է $+\infty$, ապա, ըստ 4-րդ հատկության, նրա y օրդինատը նույնպես ձգտում է $+\infty$:



Նկ. 34

Ընդ որում պետք է նկատի ունենալ, որ y-ը ձգտում է $+\infty$ շատ ավելի արագ, քան x-ը: Եթե, օրինակ, x-ը ընդունում է 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... արժեքները, ապա y-ը համապատասխանաբար հավասար է այդ թվերի քառակուսիներին՝ 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Ըստ 5-րդ հատկության՝ $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի x և $-x$ աբսցիսներով կետերը ունեն նույն օրդինատը, այդ իսկ պատճառով $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է y առանցքի նկատմամբ: Այսպիսով y առանցքը $y = x^2$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափության առանցքն է:***

$y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 34-ում:

$y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող գիծն անվանում են ***պարաբոլ:***

Հաճախ մենք կարճ կասենք՝ «$y = x^2$ պարաբոլ»: Հետագայում մենք կիմանանք, որ $y = ax^2 + bx + c$ տեսքի ֆունկցիայի գրաֆիկը (որտեղ a, b, c-ն տված թվեր են և $a \neq 0$) նույնպես անվանում են պարաբոլ:

Պարաբոլի և նրա համաչափության առանցքի հատման կետը անվանում են պարաբոլի գագաթ: $y = x^2$ դեպքում դա O(0; 0) կետն է:

Դիտարկելով $y = x^2$ պարաբոլը՝ կարելի անմիջականորեն տեսնել $y = x^2$ ֆունկցիայի մի շարք հատկություններ:

Իրոք, $y = x^2$ պարաբոլն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Դա $y = x^2$ ֆունկցիայի 1-ին հատկությունն է:

$y = x^2$ պարաբոլի բոլոր կետերը, բացի նրա գագաթից, գտնվում են x-երի առանցքից վերև: Դա 2-րդ հատկությունն է:

Եթե A(x; y) կետը պարաբոլով շարժվում է այնպես, որ նրա աբսցիսը դրական է և աճում է, ապա նրա y օրդինատը նույնպես աճում է: Դա 3-րդ հատկությունն է:

$y = x^2$ պարաբոլը անընդհատ գիծ է (6-րդ հատկություն) և համաչափ է y առանցքի նկատմամբ (5-րդ հատկություն): Բայց մենք գրաֆիկից տեսնում ենք նաև, որ եթե պարաբոլի կետերի x աբսցիսները բացասական են և աճում են, ապա նրանց y օրդինատները նվազում են, այսինքն x-ի մեծ բացասական արժեքին համապատասխանում է y-ի փոքր արժեք: Դա բխում է նաև 3 և 5 հատկություններից:

472. ա) Ի՞նչ է նշանակում, որ $y = x^2$ ֆունկցիան աճում է x-ի ոչ բացասական արժեքների համար:
բ) Ի՞նչ է նշանակում, որ $y = x^2$ ֆունկցիան զույգ է:
գ) Ձևակերպեք $y = x^2$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

473. Ցույց տվեք, որ $y = x^2$ ֆունկցիայի 2 և 5 հատկություններից բխում է, որ $x \neq 0$ դեպքում $y < 0$:

474. Ցույց տվեք, որ $y = x^2$ ֆունկցիայի 3 և 5 հատկություններից բխում է, որ x-ի ոչ դրական արժեքների համար $y = x^2$ ֆունկցիան նվազում է, այսինքն, եթե $x_1 < x_2 \leqslant 0$, և $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, ապա $y_1 > y_2$:

475. Կազմեք $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ, եթե x-ը փոփոխվում է
ա) 1 քայլով (մասշտաբի 1 միավորով) [0; 15] միջակայքում
բ) 1 քայլով՝ [–15; 0] միջակայքում
գ) 0,1 քայլով՝ [0; 1] միջակայքում
դ) 0,1 քայլով՝ [0; 0,1] միջակայքում
ե) 0,01 քայլով՝ [0; 0,1] միջակայքում
զ) 0,01 քայլով՝ [–0,1; 0] միջակայքում:

Դիտողություն. Ֆունկցիայի արժեքները հաշվելիս կարելի է օգտագործել գումարի քառակուսու բանաձևը: Օրինակ

$$3{,}1^2 = (3 + 0{,}1)^2 = 9 + 0{,}6 + 0{,}01 = 9{,}61:$$

476. Համեմատեք թվային արտահայտությունների արժեքները՝
ա) $1{,}17^2$ և $1{,}18^2$; բ) $1{,}18^2$ և $1{,}19^2$;
գ) $2{,}31^2$ և $2{,}32^2$; դ) $2{,}71^2$ և $2{,}72^2$:

477. $y = x^2$ ֆունկցիայի համար համեմատեք y_1 և y_2-ը, եթե
ա) $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0{,}6$; բ) $x_1 = 7{,}1$, $x_2 = 6{,}3$;
գ) $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 1$; դ) $x_1 = 10{,}2$, $x_2 = 9{,}8$:

478. Տված է $y = x^2$ ֆունկցիան: Գտեք $y(x)$-ը, լուծումը գրելով հետևյալ կերպ՝ $y(-0{,}8) = (-0{,}8)^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$:
ա) $y(-1{,}2)$, $y(0)$, $y(-2{,}5)$; բ) $y(-0{,}9)$, $y(-1{,}1)$, $y(-0{,}1)$:

479. Որոշեք $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքի նշանը x-ի հետևյալ արժեքների դեպքում՝
ա) 0,2; 1,5; –3; –0,2; բ) –8,1; –100; 0,31; 100:

480. Աճո՞ղ է արդյոք $y = x^2$ ֆունկցիան $[a; b]$ միջակայքում, եթե
ա) $a = -3$, $b = 3$; բ) $a = -1$, $b = 1$; գ) $a = 1$, $b = 4$;
դ) $a = 0$, $b = 0{,}5$; ե) $a = -2$, $b = -1$; զ) $a = -3$, $b = 0$:

481. ա) Ի՞նչն են անվանում $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկ:
բ) Ինչպե՞ս կառուցել $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
գ) Ինչպե՞ս են անվանում $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող գիծը:
դ) Ինչո՞ւմն է կայանում այդ գրաֆիկի անընդհատության հատկությունը:
ե) Ո՞ր կետն են անվանում $y = x^2$ պարաբոլի գագաթ:
զ) Ո՞ր ուղիղն է հանդիսանում $y = x^2$ պարաբոլի համաչափության առանցք:

482. Տված է $y = x^2$ ֆունկցիան:
ա) Հաշվեք y-ի արժեքները՝ փոփոխելով x-ի արժեքները -3-ից 3՝ 1 քայլով: Լուծումը ձևակերպեք աղյուսակի տեսքով:
բ) Կառուցեք xOy կոորդինատային համակարգ՝ մասշտաբի միավորը վերցնելով 1 սմ: Կառուցեք նախորդ կետում հաշված կոորդինատներով կետերը և միացրեք կառուցված կետերը անընդհատ կորով:
գ) Ո՞ր քառորդներում է դասավորված $y = x^2$ հավասարման գրաֆիկը:

483. Լրացրեք հետևյալ աղյուսակը և կառուցեք $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

x	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2	$\pm 2\frac{1}{2}$	± 3	$\pm 3\frac{1}{2}$	± 4
$y = x^2$										

484. Պատկանո՞ւմ է արդյոք A(x; y) կետը $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, եթե՝
ա) $x = 1$, $y = 5$; բ) $x = 3$, $y = 9$; գ) $x = 1{,}5$, $y = 2\frac{1}{4}$;
դ) $x = -2$, $y = 4$; ե) $x = 0{,}4$, $y = 1{,}6$; զ) $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 4{,}5$;

485. Տրված է $y = x^2$ ֆունկցիան: x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում՝
ա) $y > 0$; բ) $y = 0$; գ) $y < 0$;
դ) Ֆունկցիան աճում է, ե) ֆունկցիան նվազում է:

5.2 Քառակուսի արմատի գաղափարը

Երկրաչափության մեջ երբեմն հանդիպում է այսպիսի խնդիր. քառակուսու մակերեսը հավասար է b-ի, գտնել նրա կողմը: Այս խնդիրը հետևյալ ավելի ընդհանուր խնդրի մասնավոր դեպքն է: Տված b իրական թվի համար գտնել a իրական թիվ այնպես, որ $a^2 = b$: Ցույց տանք, որ խնդիրն ունի լուծում, եթե միայն b-ն ոչ բացասական թիվ է:

Իրոք, եթե $a = 0$, ապա $b = a^2 = 0 \cdot 0 = 0$:

Եթե $a > 0$, ապա բազմապատկելով $a > 0$ անհավասարությունը a դրական թվով` կստանանք

$$b = a^2 > 0:$$

Եթե $a < 0$, ապա բազմապատկելով այդ անհավասարությունը a բացասական թվով` կստանանք

$$b = a^2 > 0:$$

Այսպիսով, ցույց տրվեց, որ ցանկացած a իրական թվի համար ճիշտ է $a^2 \geqslant 0$ անհավասարությունը, այսինքն ***ցանկացած իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական թիվ է:***

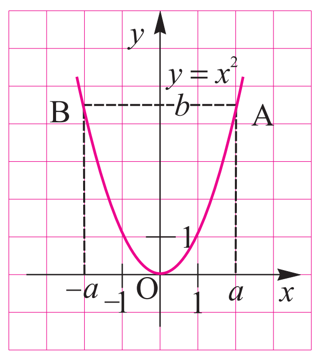
Ասվածից հետևում է, որ ***գոյություն չունի իրական թիվ, որի քառակուսին հավասար լինի բացասական թվի:***

Այժմ, օգտագործելով $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ցույց տանք, որ ցանկացած b ոչ բացասական թվի համար գոյություն ունի a իրական թիվ, այնպիսին, որ

$$a^2 = b:$$

$b = 0$ դեպքում մենք պետք է գտնենք այնպիսի a թիվ, որ $a^2 = 0$: Պարզ է, որ միակ այդպիսի թիվը $a = 0$-ն է, որովհետև, ինչպես ցույց տրվեց վերևում, $0^2 = 0$, իսկ եթե $a \neq 0$, ապա $a^2 > 0$:

Դիցուք այժմ $b > 0$: xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցենք $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: y-ների առանցքի վրա կոորդինատների 0 սկզբնակետից դեպի վեր տեղադրենք b երկարությամբ հատված և նրա վերին ծայրակետից տանենք x-երի առանցքին զուգահեռ ուղիղ: Այդ ուղիղը $y = x^2$ պարաբոլը հատում է A և B երկու կետերում (նկ. 35):



Նկ. 35

Դիցուք A կետի աբսցիսը a-ն է: Այդ դեպքում B կետի աբսցիսը կլինի $(-a)$ թիվը, քանի որ A և B կետերը համաչափ են y-ների առանցքի նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ a և $(-a)$ թվերի քառակուսիները հավասար են b-ի`

$$a^2 = (-a)^2 = b:$$

Ըստ որում գոյություն չունեն այլ իրական թվեր, որոնց քառակուսին հավասար լինի b-ի:

Քառակուսի արմատ տված թվից անվանում են այն թիվը, որի քառակուսին հավասար է տված թվին:

Ասվածից հետևում է, որ՝

1) գոյություն ունի, և այն էլ երկու, քառակուսի արմատ ցանկացած b դրական թվից: Նրանք բացարձակ արժեքով իրար հավասար են և ունեն տարբեր նշաններ, այսինքն արմատներից մեկը դրական է, մյուսը՝ բացասական (նկ. 35-ում a-ն b թվի դրական արմատն է, $-a$-ն՝ բացասական արմատը),
2) 0-ի քառակուսի արմատը միակն է, այն հավասար է զրոյի,
3) գոյություն չունի իրական թիվ, որը հանդիսանում է քառակուսի արմատ բացասական թվից, այսինքն գոյություն չունի իրական թիվ, որի քառակուսին բացասական թիվ է:

Օրինակ 1: 17-ը և -17-ը 289-ի քառակուսի արմատներն են, որովհետև $17^2 = (-17)^2 = 289$:

Օրինակ 2: $\frac{1}{7}$ և $-\frac{1}{7}$-ը $\frac{1}{49}$-ի քառակուսի արմատներն են, որովհետև $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$:

Օրինակ 3: $\frac{5}{3}$ և $-\frac{5}{3}$-ը $\frac{25}{9}$-ի քառակուսի արմատներն են, որովհետև $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$:

Օրինակ 4: 0-ն 0-ի միակ քառակուսի արմատն է:

Օրինակ 5: Գոյություն չունեն -4-ից իրական քառակուսի արմատներ:

486. ա) Կարո՞ղ է արդյոք իրական թվի քառակուսին լինել բացասական թիվ:
բ) Ի՞նչն են անվանում քառակուսի արմատ տված թվից:
գ) Քանի՞ քառակուսի արմատ ունի դրական թիվը, զրոն:
դ) Գոյություն ունե՞ն արդյոք իրական թվեր, որոնք բացասական թվի քառակուսի արմատ են:

487. Գտեք քառակուսու կողմը, եթե նրա մակերեսը հավասար է՝
ա) 25 սմ^2; բ) 1 մ^2; գ) 400 մմ^2;
դ) 49 դմ^2; ե) 16 կմ^2; զ) 1 հա:

488. $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ ցույց տվեք, որ
ա) գոյություն ունեն երկու իրական թվեր, որոնք հանդիսանում են 3 թվի քառակուսի արմատներ,
բ) գոյություն ունի միակ քառակուսի արմատ 0 թվից,
գ) գոյություն չունի –5-ից իրական քառակուսի արմատներ:

489. Գտեք թիվ, որի քառակուսին հավասար է՝
ա) 4; բ) 100; գ) –6; դ) 81;
ե) –0,25; զ) 0; է) 0,09; ը) 1,21:

490. Ապացուցեք, որ
ա) 11-ը 121-ի քառակուսի արմատ է,
բ) –13-ը 169-ի քառակուսի արմատ է,
գ) 1,7-ը 2,39-ի քառակուսի արմատ չէ,
դ) –0,7-ը –0,49-ի քառակուսի արմատ չէ:

491. Գտեք տված թվերի քառակուսի արմատները՝
ա) 10 000; բ) 3600; գ) 640 000; դ) 1 000 000;
ե) $\frac{1}{4}$; զ) $\frac{1}{9}$; է) $\frac{25}{36}$; ը) $\frac{16}{49}$:
Ապացուցեք լուծման ստույգությունը:

492. Ստուգեք, հանդիսանո՞ւմ է արդյոք
ա) 42-ը 1764-ի քառակուսի արմատ,
բ) –19-ը 361-ի քառակուսի արմատ:

5.3 Թվաբանական քառակուսի արմատ

Տված b ***ոչ բացասական թվից թվաբանական քառակուսի արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական թիվը, որի քառակուսին հավասար է*** b***-ի:***

Այդ թիվը նշանակում են $\sqrt{b}$-ով և կարդում՝ «թվաբանական քառակուսի արմատ b թվից»:

Հաշվենք մի քանի թվաբանական քառակուսի արմատներ՝

$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$, $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$:

Ընդգծենք, որ թվաբանական քառակուսի արմատը զրոյից հավասար է զրո-յի, իսկ թվաբանական քառակուսի արմատը դրական թվից դրական թիվ է:

Երբեմն «թվաբանական քառակուսի արմատ թվից» բառերի փոխարեն ասում են «թվից քառակուսի արմատի թվաբանական արժեք» կամ «երկրորդ աստիճանի թվաբանական արմատ թվից»:

Հաճախ $\sqrt{b}$ արտահայտությունը $b \geqslant 0$ դեպքում մենք ուղղակի կանվանենք քառակուսի արմատ b-ից, կարճության համար բաց թողնելով «թվաբանա-կան» ածականը, սակայն այն նկատի ունենալով: $b < 0$ դեպքում $\sqrt{b}$ արտա-հայտությունը իմաստ չունի:

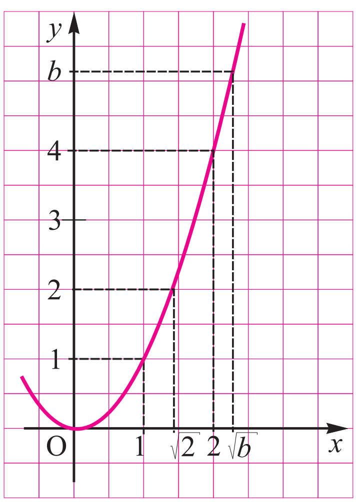
b դրական թվի երկու քառակուսի արմատներից մեկը թվաբանական է և հավասար է $\sqrt{b}$-ի, իսկ մյուսը հավասար է $-\sqrt{b}$:

Իսկ թվաբանական արմատը 0-ից միակն է՝ $\sqrt{0} = 0$:

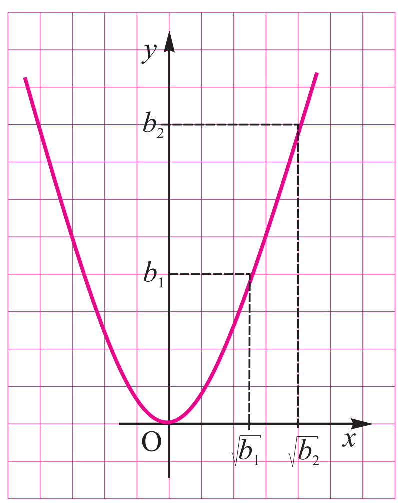
Նշանակում է, ***յուրաքանչյուր ոչ բացասական*** b ***թվի համար գոյություն ունի միակ թվաբանական քառակուսի արմատ:***

Նկ. 53-ում Ox առանցքի վրա 0-ն 0 թվի քառակուսի արմատն է, 1-ը՝ 1-ի թվաբանական քառակուսի արմատը, $\sqrt{2}$-ը՝ 2-ի թվաբանական քառակուսի արմատը, 2-ը՝ 4-ի թվաբանական քառակուսի արմատը, $\sqrt{b}$-ն՝ b դրական թվի քառակուսի արմատը: Ինչպես երևում է նկ. 54-ից, եթե b_1 և b_2 ոչ բացասական թվերը այնպիսիք են, որ $b_1 < b_2$, ապա $\sqrt{b_1} < \sqrt{b_2}$: Այլ կերպ ասած, ***երկու ոչ բա-ցասական թվերից մեծ է այն, որի քառակուսին մեծ է:***

Ասվածից հետևում է նաև, որ իրար հավասար ոչ բացասական թվերի քառակուսին արմատները իրար հավասար են: Կարելի է նաև այսպես ասել՝ եթե ոչ բացասական թվերի քառակուսիները հավասար են, ապա հավասար են նաև այդ թվերը:



Նկ. 36



Նկ. 37

493. ա) Ի՞նչն են անվանում տված թվից թվաբանական քառակուսի արմատ:
բ) Տված թվից քանի թվաբանական քառակուսի արմատ գոյություն ունի:
գ) Կարո՞ղ են արդյոք տարբեր թվերի թվաբանական քառակուսի արմատները իրար հավասար լինել:
դ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$, եթե $b \geqslant 0$:

494. Գտեք թվաբանական քառակուսի արմատը՝ [1]
ա) $\sqrt{9}, \sqrt{4}, \sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{81}, \sqrt{121}, \sqrt{400}, \sqrt{144}$;
բ) $\sqrt{0{,}49}, \sqrt{0{,}25}, \sqrt{0{,}04}, \sqrt{0{,}0016}, \sqrt{\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{1}{25}}, \sqrt{\frac{1}{81}}, \sqrt{\frac{1}{1600}}$:

Հաշվեք (495-497).

495. ա) $2 + \sqrt{1}$; բ) $15 - \sqrt{36}$; գ) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$;
դ) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; ե) $\sqrt{49} - \sqrt{1}$; զ) $\sqrt{81} - \sqrt{49}$;
է) $\sqrt{100} - \sqrt{36}$; ը) $\sqrt{144} - \sqrt{121}$; թ) $\sqrt{0{,}36} + \sqrt{0{,}49}$:

496. ա) $2 \cdot \sqrt{81}$; բ) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{100}$; գ) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{0{,}25}$;
դ) $\sqrt{0{,}16} \cdot \sqrt{9}$; ե) $\sqrt{0{,}27} : \sqrt{3}$; զ) $\sqrt{49} : \sqrt{0{,}01}$;
է) $\sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{81}$; ը) $\sqrt{0{,}36} : \sqrt{\frac{1}{36}}$; թ) $\sqrt{1{,}69} : \sqrt{0{,}0625}$:

497. ա) $5 \cdot \sqrt{4} \cdot 3$; բ) $2\sqrt{9} + 3\sqrt{16}$; գ) $\sqrt{13 - 3 \cdot 3}$;
դ) $\sqrt{7^2 - 26 : 2}$; ե) $\frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 22 : 2}$; զ) $3\sqrt{0{,}64} - 5\sqrt{1{,}21}$:

498. Իմաստ ունի՞ արտահայտությունը՝
ա) $-\sqrt{25}$; բ) $\sqrt{-25}$; գ) $\sqrt{0}$; դ) $\sqrt{1{,}21}$:

499. Գտեք (եթե հնարավոր է) թիվ, որի թվաբանական քառակուսի արմատը հավասար է՝
ա) 7; բ) 0,2; գ) –2; դ) –100:

---

[1] Այս և հաջորդ վարժությունները կատարելիս հարմար է օգտվել քառակուսիների աղյուսակից:

Հաշվեք՝ (500-501)

500. ա) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; բ) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; գ) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; դ) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$:

501. ա) $\sqrt{900}$, $\sqrt{6400}$, $\sqrt{810000}$, $\sqrt{250000}$, $\sqrt{16000000}$;
բ) $\sqrt{0,64}$, $\sqrt{0,0064}$, $\sqrt{0,0009}$, $\sqrt{0,000016}$, $\sqrt{0,000004}$;
գ) $\sqrt{256}$, $\sqrt{729}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{361}$:

502. Ապացուցեք, որ
ա) $\sqrt{4} > 1$; բ) $\sqrt{3} > 1$; գ) $2 < \sqrt{5}$;
դ) $1,4 < \sqrt{2}$; ե) $1,7 < \sqrt{3}$; զ) $1,8 > \sqrt{3}$;
է) $1 < \sqrt{2} < 2$; ը) $1 < \sqrt{3} < 2$:

503. Համեմատեք թվերը՝
ա) $\sqrt{100}$ և $\sqrt{81}$; բ) $\sqrt{100}$ և $\sqrt{121}$; գ) $\sqrt{4}$ և 3;
դ) $\frac{1}{5}$ և $\sqrt{0,25}$; ե) 2 և $\sqrt{\frac{1}{16}}$; զ) $\frac{9}{5}$ և $\sqrt{\frac{4}{49}}$;
է) $\sqrt{0,09}$ և $\sqrt{\frac{4}{25}}$; ը) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ և $\sqrt{\frac{64}{49}}$; թ) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ և $\frac{1}{4}$:

504. Հաշվեք՝
ա) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; բ) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; գ) $\left(\sqrt{13}\right)^2$; դ) $\left(\sqrt{17}\right)^2$:

505. Գտեք երկու իրար հաջորդող բնական թվեր, որոնց միջև գտնվում է տված թիվը՝
ա) $\sqrt{13}$; բ) $\sqrt{17}$; գ) $\sqrt{23}$; դ) $\sqrt{39}$:

5.4* Քառակուսի արմատ բնական թվից

Բնական թվի քառակուսին բնական թիվ է: Բայց ոչ բոլոր բնական թվերն են որևէ բնական թվի քառակուսի:

Առաջին 20 բնական թվերի մեջ միայն 4 թիվ են բնական թվի քառակուսի, դրանք են՝ 1, 4, 9 և 16-ը: Առաջին 1000 բնական թվերի մեջ կա միայն 31 հատ թիվ, որոնք հանդիսանում են բնական թվի քառակուսի, այսինքն մոտ 3%-ը:

Ահա դրանք՝

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961:

Իսկ եթե դիտարկենք 10000-ից ոչ մեծ բնական թվերը, ապա նրանց մեջ կան ընդամենը 100 այսպիսի թվեր, այսինքն 1%-ն է հանդիսանում բնական թվի քառակուսի՝

$$1^2, 2^2, 3^2, ... , 100^2:$$

Եթե այս թվերից քառակուսի թվաբանական արմատ հանենք, ապա համապատասխանաբար կստացվեն

$$1, 2, 3, ..., 100$$

թվերը:

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ մեծ բնական թվերի մեջ շատ հազվադեպ են հանդիպում բնական թվի քառակուսի հանդիսացող թվեր:

Թեորեմ: ***Եթե բնական թիվը որևէ բնական թվի քառակուսի չի հանդիսանում, ապա այն հանդիսանում է իռացիոնալ թվի քառակուսի:***

Ապացույց. Դիցուք N-ը բնական թվի քառակուսի չհանդիսացող բնական թիվ է: Ենթադրենք $\sqrt{N}$-ը ռացիոնալ թիվ է, այսինքն

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q}, \qquad (1)$$

որտեղ p-ն և q-ն բնական թվեր են:

Կարող ենք համարել, որ այդ կոտորակը անկրճատելի է, այլապես նախապես մենք դա կկրճատեինք: Ըստ քառակուսի արմատի սահմանման՝ (1) հավասարությունից կստանանք

$$N = \frac{p^2}{q^2} \qquad (2)$$

Եթե այստեղ $q = 1$, ապա $N = p^2$, այսինքն N-ը բնական թվի քառակուսի է, որը հակասում է թեորեմի պայմանին: Իսկ եթե $q > 1$, ապա (2) հավասարության ձախ մասը բնական թիվ է, իսկ աջ մասը՝ անկրճատելի կոտորակ, որը հնարավոր չէ (⌈պետք է նկատի ունենալ, որ եթե p և q բնական թվերը ընդհանուր արտադրիչներ չունեն, ապա ակնհայտ է, որ p^2-ն և q^2-ն նույնպես ընդհանուր արտադրիչ չունեն): ⌋

Հետևաբար մեր ենթադրությունը սխալ էր, այսինքն $\sqrt{N}$-ը իռացիոնալ թիվ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, ...$

թվերը իռացիոնալ թվեր են:

506. Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել
ա) պարզ թվի քառակուսի արմատը,
բ) բնական թվի քառակուսի արմատը:

507. ա) Գրեք 150-ից փոքր այն բնական թվերը, որոնք հանդիսանում են բնական թվի քառակուսի:
բ) 150-ից մինչև 200 բնական թվերի մեջ կա՞ն արդյոք բնական թվի քառակուսի հանդիսացող թվեր:

508. Տված թիվը հանդիսանո՞ւմ է արդյոք բնական թվի քառակուսի
ա) 7; բ) 27; գ) 0; դ) -5;
ե) $\frac{9}{4}$; զ) 100; է) -16; ը) 49:

509. Ապացուցեք, որ գոյություն չունի ռացիոնալ թիվ, որի քառակուսին հավասար է՝
ա) 5; բ) 7; գ) $\frac{1}{2}$; դ) $\frac{1}{3}$:

510. Ապացուցեք հետևյալ թվերի իռացիոնալությունը՝
ա) $\sqrt{3}$; բ) $\sqrt{5}$; գ) $\sqrt{7}$; դ) $\sqrt{11}$;
ե) $\sqrt{6}$; զ) $\sqrt{8}$; է) $\sqrt{10}$; ը) $\sqrt{12}$:

511. Թիվը ռացիոնալ է, թե՞ իռացիոնալ.
ա) $\sqrt{4}$; բ) $\sqrt{13}$; գ) $\sqrt{16}$; դ) $\sqrt{17}$;
ե) $\sqrt{9}$; զ) $\sqrt{20}$; է) $\sqrt{25}$; ը) $\sqrt{0}$:

Ապացուցեք, որ տված արտահայտության արժեքը ռացիոնալ թիվ է՝ (512-513):

512. ա) $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$; բ) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$;
գ) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; դ) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$;

513. ա) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; բ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$;
գ) $\left(\sqrt{7}-1\right)^2+\left(\sqrt{7}+1\right)^2$; դ) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$;
ե) $\left(\sqrt{7}-2\right)^2+4\sqrt{7}$; զ) $\left(\sqrt{8}+3\right)^2-6\sqrt{8}$:

514. Ապացուցեք, որ ցանկացած $a \geqslant 0$ թվի համար տեղի ունի
$$\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)=1$$
հավասարությունը:

5.5 Թվաբանական քառակուսի արմատների հատկությունները

Թեորեմ. ***Դիցուք a-ն և b-ն ցանկացած ոչ բացասական թվեր են, իսկ c-ն դրական թիվ: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝***

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \tag{1}$$

$$\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}: \tag{2}$$

Ցանկացած a-իրական թվի համար ճիշտ է

$$\sqrt{a^2}=|a| \tag{3}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: (1) հավասարության ձախ և աջ մասերը ոչ բացասական թվեր են, և նրանց քառակուսիները հավասար են միևնույն ab թվին՝

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2=ab,$$

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=ab:$$

Բայց այդ դեպքում, ինչպես մենք գիտենք կետ 3.2-ից, հավասար են նաև այդ թվերը:

(2) հավասարությունը ապացուցվում է նույն կերպ, ինչպես (1) հավասարությունը: Նրա ձախ և աջ մասերը առանձին-առանձին բարձրացնենք քառակուսի՝

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2=\frac{a}{c},$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a}{c}$$

Քանի որ $\sqrt{\frac{a}{c}}$ և $\sqrt{\frac{a}{c}}$ թվերի քառակուսիները իրար հավասար են, ապա (2) հավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին:

Ցանկացած իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական է, ուստի (3) հավասարության ձախ մասում գրված է թվաբանական արմատ ոչ բացասական թվից:

Ըստ թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանման՝ $\left(\sqrt{a^2}\right)^2=a^2$:

Ցույց տանք այժմ, որ $|a|^2 = a^2$: Իրոք, եթե $a \geqslant 0$, ապա $|a| = a$ և դրա համար էլ $|a|^2 = a^2$:

Եթե $a < 0$, ապա $|a| = -a$, հետևաբար $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$:

Այսպիսով, ապացուցեցինք, որ (3) հավասարության ձախ մասի քառակուսին հավասար է նրա աջ մասի քառակուսուն, և քանի որ այդ երկու թվերն էլ ոչ բացասական են, ապա իրար հավասար են:

Թեորեմն ապացուցված է:

Նշենք, որ (1) հավասարությունը նշանակում է, որ ***ոչ բացասական թվերի արտադրյալի արմատը հավասար է այդ թվերի արմատների արտադրյալին:*** (2) հավասարությունը նշանակում է, որ ***ոչ բացասական թվի և դրական թվի քանորդի արմատը հավասար է այդ թվերի արմատների քանորդին:***

Նկատենք, որ այս ձևակերպումներում սեղմության համար մենք «թվաբանական քառակուսի արմատ» բառերի փոխարեն ուղղակի գրեցինք «արմատ»: (1), (2) և (3) հավասարություններն օգնում են պարզեցնել քառակուսի արմատներ պարունակող թվային արտահայտությունները:

Օրինակ 1. $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$:

Օրինակ 2. $\sqrt{\dfrac{27}{25}} = \sqrt{\dfrac{9 \cdot 3}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{1}} = \dfrac{3}{5}\sqrt{3}$

Օրինակ 3. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{16^2} = 16$:

Օրինակ 4.
$$\begin{aligned}&\left(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}\right) =\\ &= \left(2\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{36} + \sqrt{4}\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) =\\ &= \left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) =\\ &= \left(3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) = 6\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) =\\ &= 6\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 6(5-2) = 18:\end{aligned}$$

$\sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ ձևափոխությունն անվանում են ***արտադրիչն արմատանշանի տակից դուրս բերում***, իսկ հակադարձ ձևափոխությունը՝ $4\sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5}$ անվանում են ***արտադրիչը արմատանշանի տակ տանել:***

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ձևափոխությունն անվանում են ***հայտարարում արմատանշանից ազատվել կամ հայտարարում իռացիոնալությունից ազատվել:***

515. ա) Ինչի՞ է հավասար ոչ բացասական թվերի քառակուսի արմատնե-րի արտադրյալը:
բ) Ինչի՞ է հավասար $\sqrt{a^2}$-ն a դրական թվի համար:
գ) Ինչի՞ է հավասար դրական թվերի քառակուսի արմատների քանորդը:
դ) Թվարկեք թվաբանական քառակուսի արմատի հատկությունները:
ե) Եթե $a < 0$, հանդիսանո՞ւմ է արդյոք $\sqrt{a^2}$-ն թվաբանական քառակուսի արմատ:

516. Հաշվեք՝
ա) $\sqrt{4^2}$; բ) $\sqrt{3{,}1^2}$; գ) $\sqrt{(-1)^2}$; դ) $\sqrt{(-5)^2}$;
ե) $\sqrt{1{,}13^2}$; զ) $\sqrt{(-7{,}2)^2}$; է) $\sqrt{(-0{,}3)^2}$; ը) $\sqrt{(-57{,}1)^2}$:

517. x-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում է ճիշտ հավասարությունը: [1]
ա) $\sqrt{x^2} = x$; բ) $\sqrt{x^2} = |x|$; գ) $\sqrt{x^2} = -x$; դ) $\sqrt{x^2} = 0$:

518. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝
ա) $\sqrt{a^2}$, եթե $a \geqslant 0$; բ) $\sqrt{b^2}$, եթե $b < 0$;
գ) $\sqrt{m^2}$, եթե $m = 0$; դ) $\sqrt{n^2}$, եթե $n < 0$;
ե) $\sqrt{(x+1)^2}$, եթե $x + 1 > 0$; զ) $\sqrt{(m-2)^2}$, եթե $m - 2 \geqslant 0$;
է) $\sqrt{(3a+1)^2}$, եթե $3a + 1 \geqslant 0$; ը) $\sqrt{(p-4)^2}$, եթե $p - 4 < 0$:

519. ա) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; բ) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$; գ) $\sqrt{\left(1\frac{1}{5}\right)^2}$; դ) $\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$:

520. ա) $\sqrt{2^4}$; բ) $\sqrt{3^4}$; գ) $\sqrt{2^6}$; դ) $\sqrt{3^6}$;
ե) $\sqrt{(-2)^8}$; զ) $\sqrt{(-3)^8}$; է) $\sqrt{a^4}$; ը) $\sqrt{m^6}$:

Ցուցում. Արմատատակ արտահայտությունը ձևափոխեք 2 ցուցիչով աստիճանի:

521. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝
ա) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; բ) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$;
գ) $\sqrt{1 - 2m + m^2}$; դ) $\sqrt{4 - 4p + p^2}$;

[1] Այսուհետև միշտ տառերով նշանակելու ենք թվերը: Հիշեցնենք, որ արմատանշանի տակ գտնվող թվերը ոչ բացասական են, իսկ կոտորակների հայտարարները զրո չեն դառնում:

ե) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}$;
զ) $\sqrt{9 - 6p^2 + q^4}$;
է) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$;
ը) $\sqrt{25 + 30a + 9a^2}$:

522. Հաշվեք՝

ա) $\sqrt{4 \cdot 9}$;
բ) $\sqrt{9 \cdot 16}$;
գ) $\sqrt{16 \cdot 25}$;
դ) $\sqrt{25 \cdot 49}$;
ե) $\sqrt{25 \cdot 36 \cdot 9}$;
զ) $\sqrt{49 \cdot 64 \cdot 100}$:

Արտադրիչը հանեք արմատանշանի տակից (523-527):

Օրինակ՝ $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$:

523. ա) $\sqrt{12}$; բ) $\sqrt{18}$; գ) $\sqrt{20}$; դ) $\sqrt{24}$; ե) $\sqrt{27}$;
զ) $\sqrt{28}$; է) $\sqrt{32}$; ը) $\sqrt{45}$; թ) $\sqrt{50}$; ժ) $\sqrt{72}$:

524. ա) $\sqrt{108}$; բ) $\sqrt{147}$; գ) $\sqrt{162}$; դ) $\sqrt{245}$;
ե) $\sqrt{275}$; զ) $\sqrt{363}$; է) $\sqrt{396}$; ը) $\sqrt{576}$;
թ) $\sqrt{676}$; ժ) $\sqrt{972}$; ի) $\sqrt{54756}$; լ) $\sqrt{831744}$:

Ցուցում. Բարդ դեպքերում օգտակար է արմատատակ արտահայտությունը վերլուծել պարզ արտադրիչների և առանձնացնել այդ արտադրիչների քառակուսիները, եթե այդպիսիք կան:

Օրինակ. $\sqrt{2160}$

2160	2	
1080	2	$)2^2$
540	2	
270	2	$)2^2$
135	5	
27	3	
9	3	$)3^2$
3	3	
1		

1-ին եղանակ՝ $\sqrt{2160} =$
$= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} =$
$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{15} = 12\sqrt{15}$:

2-րդ եղանակ՝ $\sqrt{2160} =$
$= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} =$
$= \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot 15} =$
$= \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3)^2} \cdot 15 = 12\sqrt{15}$:

525. ա) $\sqrt{a^4}$; բ) $\sqrt{x^3}$; գ) $\sqrt{m^5}$;
դ) $\sqrt{p^7}$; ե) $\sqrt{a^2 b^2}$; զ) $\sqrt{m^2 \cdot 4n^2}$;
է) $\sqrt{x^4 y^2}$; ը) $\sqrt{9p^2 q^4}$; թ) $\sqrt{25a^6 b^2}$;
ժ) $\sqrt{16xy^3}$; է) $\sqrt{49pq^2 a^5}$; ը) $\sqrt{121 m^4 n^3 k^2}$:

Հաշվեք (526-527).

526. ա) $\sqrt{8\cdot 50}$; բ) $\sqrt{27\cdot 12}$; գ) $\sqrt{18\cdot 50}$;
դ) $\sqrt{32\cdot 72}$; ե) $\sqrt{40\cdot 55\cdot 22}$; զ) $\sqrt{21\cdot 35\cdot 15}$;
է) $\sqrt{6\cdot 30\cdot 245}$; ը) $\sqrt{245\cdot 27\cdot 60}$; թ) $\sqrt{242\cdot 98}$:

527. ա) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}$; բ) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$; գ) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}$;
դ) $\sqrt{98}\cdot\sqrt{50}$; ե) $\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}$; զ) $\sqrt{27000}\cdot\sqrt{30}$;
է) $\sqrt{640}\cdot\sqrt{1000}$; ը) $\sqrt{25000}\cdot\sqrt{1000}$:

528. Արտադրիչը տարեք արմատանշանի տակ՝
ա) $2\sqrt{2}$; բ) $-3\sqrt{2}$; գ) $4\sqrt{5}$;
դ) $-10\sqrt{5}$; ե) $a\sqrt{4}$, $a\geqslant 0$; զ) $mn\sqrt{5}$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
է) $2x\sqrt{6}$, $x\leqslant 0$; ը) $3pq\sqrt{2}$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$; թ) $x^2\sqrt{3}$;
ժ) $a^3\sqrt{7}$, $a\geqslant 0$; ի) $m^2n\sqrt{4}$, $n\leqslant 0$; լ) $5c^2d^3\sqrt{2}$, $d\geqslant 0$:

529. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից՝
ա) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; բ) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; գ) $\sqrt{\frac{40}{81}}$; դ) $\sqrt{\frac{72}{25}}$;
ե) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$; զ) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$; է) $\sqrt{\frac{x^3}{9}}$; ը) $\sqrt{\frac{7a}{16b^2}}$;
թ) $\sqrt{\frac{3m^3n^2}{4a^2b}}$; ժ) $\sqrt{\frac{25x^2y^3}{mn^7}}$; ի) $\sqrt{\frac{0,1x}{10y^2}}$; լ) $\sqrt{\frac{5m^3}{0,5n}}$:

530. Հաշվեք՝
ա) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; բ) $\sqrt{\frac{64}{100}}$; գ) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; դ) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; ե) $\sqrt{\frac{169}{841}}$:

531. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից՝
ա) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; բ) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; գ) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; դ) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; ե) $\sqrt{\frac{6}{7}}$:
զ) $\sqrt{\frac{8}{12}}$; է) $\sqrt{\frac{1}{6a}}$; ը) $\sqrt{\frac{1}{3x}}$; թ) $\sqrt{\frac{a}{m}}$; ժ) $\sqrt{\frac{n}{p}}$:

532. Արտահայտությունը ձևափոխեք այնպես, որ արմատանշանի տակ լինի ամբողջ թիվ՝

ա) $\sqrt{3\frac{1}{3}}$; բ) $\sqrt{1\frac{5}{6}}$; գ) $\sqrt{2\frac{1}{5}}$; դ) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$; ե) $\sqrt{8\frac{1}{3}}$:

Օրինակ $\sqrt{2\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$:

533. Իմանալով, որ $\sqrt{6}\approx 2{,}449$, հաշվեք մոտավոր արժեքը՝

ա) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; բ) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; գ) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; դ) $\sqrt{\frac{2}{27}}$;

534. Հայտարարում ազատվեք արմատանշանից՝

ա) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$; բ) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; գ) $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$; դ) $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$;

ե) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6x}}$; զ) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x}}$; է) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$; ը) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$:

535. Համեմատեք թվերը՝

ա) $3\sqrt{2}$ և $2\sqrt{3}$; բ) $10\sqrt{20}$ և $20\sqrt{10}$; գ) $3\sqrt{0{,}5}$ և $2\sqrt{0{,}5}$;
դ) $5\sqrt{0{,}3}$ և $7\sqrt{0{,}3}$; ե) $3\sqrt{10}$ և $4\sqrt{6}$; զ) $6\sqrt{3}$ և $5\sqrt{4}$;
է) $7\sqrt{5}$ և $5\sqrt{7}$; ը) $2\sqrt{30}$ և $5\sqrt{5}$; թ) $12\sqrt{10}$ և $10\sqrt{12}$:

536. Թվերը դասավորեք աճման կարգով՝

ա) $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{72}$;

բ) $0{,}2\sqrt{48}$, $0{,}9\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{3}$:

537. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից՝

ա) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; բ) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; գ) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}$; դ) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{96}{5}}$:

538. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$; բ) $2\sqrt{8}-3\sqrt{2}$;
գ) $\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; դ) $a\sqrt{x}-3\sqrt{x}$;
ե) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-4\sqrt{a}$; զ) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}$;
է) $\left(3\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$; ը) $\left(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20}\right)\cdot 3\sqrt{2}$;

թ) $\left(8+3\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$; ժ) $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$;

ի) $\left(2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;

լ) $\left(\sqrt{12}-1\right)\left(\sqrt{12}+1\right)$;

խ) $\left(7-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+7\right)$; ծ) $\left(\sqrt{20}-3\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)$:

539. Վերլուծեք արտադրիչների՝

ա) $\sqrt{x}+x$; բ) $a-\sqrt{a}$; գ) $a\sqrt{3}-b\sqrt{3}$;

դ) $3\sqrt{a}-3\sqrt{b}$; ե) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$; զ) $m\sqrt{n}+n\sqrt{m}$;

է)* $\sqrt{a^3}+2a$; ը)* $3mn-\sqrt{m^3n^2}$; թ)* $xy-\sqrt{x^2y}$:

540. Օգտագործելով քառակուսի արմատների աղյուսակը, հաշվեք՝

ա) $\sqrt{2}$; բ) $\sqrt{5}$; գ) $\sqrt{13}$; դ) $\sqrt{72}$;

ա) $\sqrt{97}$; բ) $\sqrt{1,2}$; գ) $\sqrt{2,8}$; դ) $\sqrt{5,1}$;

ա) $\sqrt{12,3}$; բ) $\sqrt{43,1}$; գ) $\sqrt{841}$; դ) $\sqrt{784}$:

ա) $\sqrt{1225}$; բ) $\sqrt{1849}$; գ) $\sqrt{3249}$; դ) $\sqrt{431}$:

ա) $\sqrt{689}$; բ) $\sqrt{1578}$; գ) $\sqrt{2578}$; դ) $\sqrt{4774}$:

541. Ստուգեք անհավասարության ստույգությունը՝

ա) $6,0<\sqrt{37}<6,1$; բ) $4,3<\sqrt{19}<4,4$;

գ) $11,0<\sqrt{123}<11,1$; դ) $21,3<\sqrt{456}<21,4$:

542. Ո՞ր թիվն է $\sqrt{11}$-ի ավելի ճիշտ մոտավորությունը՝

ա) 3 կամ 4; բ) 3,3 կամ 3,4;

գ) 3,31 կամ 3,32; դ) 3,316 կամ 3,317:

543. Կրճատեք կոտորակը՝

ա) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{10}$; բ) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$; գ) $\dfrac{\sqrt{5}+5}{5}$;

դ) $\dfrac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; ե) $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$; զ) $\dfrac{m-\sqrt{m}}{2\sqrt{m}}$:

544. Աստիճան բարձրացրեք՝

ա) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$; բ) $\left(a-b\sqrt{x}\right)^2$; գ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$;

դ) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$; ե) $\left(1+3\sqrt{2}\right)^2$; զ) $\left(-1+4\sqrt{3}\right)^2$:

545. Հայտարարում ազատվեք իռացիոնալությունից.

ա) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; բ) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$; գ) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$;

դ) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; ե) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; զ) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$:

Պատմական ակնարկ

Դեռևս Բաբելոնի գիտնականները (մոտ 4000 տարի առաջ) կարողանում էին գտնել ցանկացած բնական թվի քառակուսի արմատի մոտավոր արժեքը: Բաբելոնում կիրառվող կանոնը այսպիսին է. c բնական թվի քառակուսի արմատը հաշվելու համար այն ներկայացնում են a^2+b տեսքով (a-ն այն ամենամեծ բնական թիվն է, որի համար $a^2 < c$) և այդ դեպքում c-ի քառակուսի արմատը մոտավորապես հաշվում են

$$\sqrt{c}=\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$$

բանաձևով: Օրինակ՝

$$\sqrt{1620}=\sqrt{40^2+20}\approx 40+\frac{20}{2\cdot 40}=40+\frac{1}{4}=40{,}25$$

Հույներին հայտնի էր բնական թվից մոտավոր քառակուսի արմատ հանելու բաբելացիների մեթոդը: Օրինակ, Հերոն Ալեքսանդրացու մոտ գրված է՝

$$\sqrt{160}=\sqrt{144+16}\approx 12+\frac{16}{2\cdot 12}=12\frac{2}{3}:$$

Գոյություն ունի նաև բնական թվի քառակուսի հանդիսացող թվից ճշգրիտ քառակուսի արմատ հանելու եղանակ: Այն Ռուսաստանում հայտնի էր դեռ Լ.Ֆ. Մագնիցկու ժամանակներից: Մանրամասն գրենք քառակուսի արմատ հանելու այդ եղանակը մի օրինակով.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{6'55'36}=256 \\
 & \underline{4} \\
\hline
45 & 255 \\
5 & 225 \\
\hline
506 & 3036 \\
6 & 3036 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Տված թվի թվանշանները բաժանում ենք զույգերի՝ հաշված վերջից (ընդ որում վերջին «զույգը» կարող է պարունակել մեկ թվանշան, ինչպես քննարկվող օրինակում է): 6-ից պակասորդով հանելով քառակուսի արմատ՝ կստանանք 2: 2-ը բարձրացնենք քառակուսի և հանենք 6-ից և իջեցնենք հաջորդ զույգը՝ 55-ը: 255-ից ձախ գրենք առաջին արդյունքի կրկնակին՝ 4-ը, և նրան կցագրենք այնպիսի ամենամեծ թվանշան, որ ստացված թիվը այդ թվանշանով բազմապատկելով, ստացվի 255-ից փոքր կամ հավասար թիվ: Դա 5-ն է, քանի որ $45 \cdot 5 = 225 < 255$, իսկ $46 \cdot 6 = 276 > 255$: Այսպիսով քառակուսի արմատի արժեքի երկրորդ թվանշանը 5-ն է: Հաշվենք $255 - 225 = 30$ տարբերությունը և իջեցնենք հաջորդ զույգը՝ 36-ը: 3036 թվից ձախ գրենք արդյունքի կրկնակին՝ 50-ը, և նրան կցագրենք (աջից) այնպիսի թվանշան, որ ստացված թիվը այդ թվանշանով բազմապատկելով՝ ստացվի 3036-ից փոքր կամ հավասար թիվ: Դա 6-ն է, քանի որ

$506 \cdot 6 = 3036$: Ուստի արդյունքի երրորդ թվանշանը 6-ն է:

Պատասխան՝ $\sqrt{65536} = 256$:

5.6 Քառակուսի արմատ պարունակող պարզագույն հավասարումներ և անհավասարումներ

Ա. *Պարզագույն իռացիոնալ հավասարումների լուծումը*

Նախ վերհիշենք մեկ անհայտով հավասարումների հետ առնչվող հիմնական գաղափարները:

1. x անհայտով հավասարման լուծում (կամ արմատ) կոչվում է այն թիվը, որը տեղադրելով այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն՝ ստանում ենք թվային հավասարություն:
2. Լուծել հավասարումը նշանակում է գտնել նրա բոլոր արմատները կամ ցույց տալ, որ արմատներ չկան:
3. x անհայտ պարունակող երկու հավասարումներ կոչվում են համարժեք, եթե առաջին հավասարման ցանկացած արմատ երկրորդի արմատ է, իսկ երկրորդ հավասարման ցանկացած արմատ առաջինի արմատ է, այսինքն նրանց լուծումների բազմությունները համընկնում են: (Մասնավորապես երկու հավասարումներ համարժեք են, եթե երկուսն էլ լուծում չունեն):

Մի հավասարման փոխարինումը իրեն համարժեք հավասարումով անվանում են ***հավասարման համարժեք ձևափոխություն***:

Եթե հավասարման լուծման ընթացքում կատարված է հավասարման համարժեք ձևափոխություն, ապա ձևափոխված հավասարման արմատների բազմությունը համընկնում է սկզբնական հավասարման արմատների բազմությանը:

Թվարկենք հավասարումների հիմնական համարժեք ձևափոխությունները՝

ա) հավասարման որևէ անդամի տեղափոխություն (հակադիր նշանով) հավասարման մի մասից մյուսը:

բ) հավասարման երկու մասերի բազմապատկում զրոյից տարբեր թվով (կամ բաժանում զրոյից տարբեր թվի վրա):

գ) նույնությունների, այսինքն կամայական $x \in$ R-ի համար ճշմարիտ հավասարությունների կիրառություն:

Նշենք, որ ա)-գ) ձևափոխությունների կիրառման ընթացքում հաճախ նույնիսկ չեն գրում, որ ստացվել է սկզբնականին համարժեք հավասարում, այլ գրում են «գրենք սկզբնական հավասարումը... տեսքով»:

Հաշվի առնելով վերը ասվածը՝ քննարկենք հավասարումներ, որոնց մեջ անհայտը գտնվում է արմատանշանի տակ: Այդպիսի հավասարումներն անվանում են ***իռացիոնալ հավասարումներ:***

Պարզագույն իռացիոնալ հավասարումն ունի

$$\sqrt{x} = a \qquad (1)$$

տեսքը, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանումից հետևում է, որ $a < 0$ դեպքում (1) հավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a \geqslant 0$, ապա հաշվի առնելով քառակուսի արմատի այն հատկությունը, որ յուրաքանչյուր ոչ բացասական թիվ հանդիսանում է միակ ոչ բացասական թվի քառակուսի արմատ, ստանում ենք, որ (1) հավասարումն ունի ***միակ*** $x = a^2$ լուծումը, քանի որ ըստ քառակուսի արմատի հատկության, $a \geqslant 0$ դեպքում $\sqrt{a^2} = a$:

Փաստորեն կարելի է ասել նաև, որ (1) հավասարումը $a \geqslant 0$ դեպքում լուծելու համար նրա երկու մասը պետք է բարձրացնել քառակուսի: Այսպես,

$$\sqrt{2x+1} = 3$$

հավասարումը լուծելու համար նրա երկու մասը բարձրացնում ենք քառակուսի՝

$$2x + 1 = 9$$

և ստանում, որ այդ հավասարումն ունի $x = 4$ ***միակ*** արմատը:

Հետագայում կտեսնենք, որ հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելու հնարքը հաճախ է կիրառվում իռացիոնալ (և ոչ միայն իռացիոնալ) հավասարումներ լուծելիս:

Սակայն այստեղ հարկ է ուշադրություն դարձնել հետևյալ հանգամանքի վրա:

Ընդունված է ասել, որ տված երկու հավասարումներից երկրորդը առաջինի ***հետևանքն է,*** եթե առաջին հավասարման ցանկացած արմատ երկրորդի արմատն է:

Մասնավորապես, եթե առաջին հավասարումն արմատներ չունի, ապա ցանկացած երկրորդ հավասարում նրա հետևանքն է: Պարզ է նաև, որ համարժեք հավասարումներից ցանկացածը մյուսի հետևանքն է:

Օրինակ, դիտարկենք $\sqrt{x} = 1$ և $x^2 = 1$ հավասարումները: Ինչպես վերը տեսանք, առաջին հավասարումն ունի միակ $x = 1$ արմատը, որը նաև երկրորդ հավասարման արմատ է, ուրեմն $x^2 = 1$ հավասարումը $\sqrt{x} = 1$ հավասարման հետևանքն է: Բայց $x^2 = 1$ հավասարումն ունի ևս մեկ $x = -1$ արմատ, որը $\sqrt{x} = 1$ հավասարման արմատ չէ: Հետևաբար $\sqrt{x} = 1$ և $x^2 = 1$ հավասարումները համարժեք չեն:

Հավասարման փոխարինումը ուրիշ հավասարումով, որը առաջինի հետևանքն է, անվանում են ***անցում հետևանք-հավասարման:*** Հետևանք-հավասարմանն անցնելու ընթացքում հնարավոր է այնպիսի արմատների ի հայտ գալը, որոնք սկզբնական հավասարման արմատներ չեն, այսինքն՝ հնարավոր է տվյալ հավասարման համար ***կողմնակի (ավելորդ) արմատների*** առաջացում:

Միևնույն ժամանակ հետևանք-հավասարմանն անցնելու ընթացքում հնարավոր չէ կորցնել սկզբնական հավասարման արմատները (դա բխում է հետևանք-հավասարման սահմանումից):

Այսպիսով, եթե տրված հավասարման լուծման ընթացքում անցում է կատարվել հետևանք-հավասարման, ապա անհրաժեշտ է ստուգել, արդյոք, հետևանք-հավասարման բոլոր արմատները սկզբնական հավասարման արմատնե՞ր են: Այլ կերպ ասած, հավասարման լուծման այս մեթոդի ընտրության դեպքում ***ստացված արմատների ստուգումը սկզբնական հավասարման մեջ հավասարման լուծման պարտադիր մասն է:***

Թվարկենք մի քանի ձևափոխություններ, որոնք բերում են հետևանք-հավասարման և հետևաբար կարող են բերել կողմնակի արմատների առաջացման:

1. ***Հավասարումը զույգ աստիճանի (մասնավորապես քառակուսի) բարձրացնելը:***

Օրինակ, $\sqrt{2x+1} = -1$ հավասարումը քառակուսի բարձրացնելով՝ կստանանք $2x + 1 = 1$ հավասարումը, որը ունի $x = 0$ արմատ, մինչդեռ սկզբնական հավասարումը լուծում չունի:

2. ***Հավասարման հայտարարից ազատվելը*** (կամ, ինչպես ընդունված է ասել, խաչաձև բազմապատկումը)

Օրինակ,

$$\frac{x-3}{\sqrt{2x-7}} = 0$$

հավասարման հայտարարից ազատվելը բերում է $x - 3 = 0$ հետևանք հավասարման, որի $x = 3$ արմատը սկզբնական հավասարման արմատ չէ, որովհետև այդ արժեքի դեպքում

$$2x - 7 = 2 \cdot 3 - 7 = -1,$$

իսկ քառակուսի արմատ -1 թվից իմաստ չունի:

3. ***Նման անդամներ միացնելը:***

Օրինակ, նման անդամների միացումից հետո

$$\sqrt{x} + x + (1 - \sqrt{x}) = 0$$

հավասարումից ստացվում է $x + 1 = 0$ հավասարումը, որն ունի սկզբնական հավասարման համար կողմնակի հանդիսացող $x = -1$ արմատը:

Հարկ է նկատի ունենալ նաև, որ քառակուսի արմատ պարունակող հավասարումներում արմատի տակ գտնվող արտահայտությունները չեն կարող լինել բացասական: Դա երբեմն կարող է նպաստել հավասարման՝ արմատ չունենալու փաստի բացահայտմանը: : Օրինակ, առանց քառակուսի բարձրացնելու

$$3\sqrt{2x - 1} = \sqrt{-2x}$$

հավասարումը, կարելի է ցույց տալ, որ այն արմատներ չունի:

Իրոք, այդ հավասարման լուծումները անհրաժեշտաբար պետք է բավարարեն

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ -2x \geqslant 0 \end{cases}$$

համակարգին, որը, ակնհայտ է, լուծումներ չունի:

Պարզ է, որ եթե որևէ հավասարման երկու մասը բարձրացնենք քառակուսի, (կամ ցանկացած բնական աստիճան), ապա կստանանք հետևանք-հավասարում:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$\sqrt{4x + 5} = \sqrt{5 - 2x} \qquad (1)$$

հավասարումը:

Հավասարման երկու մասը բարձրացնելով քառակուսի, ստանում ենք

$$4x + 5 = 5 - 2x$$

հավասարումը, որն ունի միակ՝ $x = 0$ արմատը: Մնում է ստուգել, իրո՞ք $x = 0$-ն (1) հավասարման արմատ է:

Ստուգում $\sqrt{4x + 5} - \sqrt{5 - 2x} = 0$

$x = 0$՝ $\sqrt{4 \cdot 0 + 5} - \sqrt{5 - 2 \cdot 0} = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$:

Պատասխան՝ $x = 0$:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$\sqrt{x} \cdot (x + 1) = 0 \qquad (2)$$

հավասարումը:

Պայմանավորվենք x պարունակող որևէ $f(x)$ արտահայտության որոշման տիրույթը նշանակել $D(f)$-ով, այսինքն $D(f)$-ը x-ի այն արժեքների բազմությունն է, որոնց համար $f(x)$-ը իմաստ ունի:

Օրինակ՝

$$\frac{-4x}{5-x}$$

արտահայտության մեջ x փոփոխականի թույլատրելի արժեքներն են բոլոր իրական թվերը՝ բացառությամբ 5-ի:

Ընդունված է նաև *հավասարման թույլատրելի արժեքների բազմություն (կրճատ՝ ԹԱԲ) անվանել անհայտի այն արժեքների բազմությունը, որոնց համար հավասարման ձախ և աջ մասերը միաժամանակ իմաստ ունեն:*

Այդ դեպքում $f_1(x)\,f_2(x) = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ x \in D(f_2) \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0, \\ x \in D(f_1) \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Ուստի (2) հավասարման լուծումների բազմությունը $\sqrt{x} = 0$ հավասարման և

$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծումների բազմությունների միավորումն է: Քանի որ համակարգը լուծումներ չունի, ապա (2) հավասարումն ունի միակ լուծում՝ $x = 0$:

Օրինակ 3. Լուծենք

$$\frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x-2}} = 0 \tag{3}$$

հավասարումը:

(3) հավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x^2 - 4x = 0, \\ \sqrt{x-2} \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

համակարգին:

(4) համակարգի հավասարումն ունի $x_1 = 0$ և $x_2 = 4$ արմատները, որոնցից համակարգի երկրորդ պայմանին բավարարում է միայն x_2 թիվը: Հետևաբար (4) համակարգի և նրան համարժեք (3) հավասարման միակ լուծումը $x_2 = 4$ թիվն է:

Պատասխան՝ 4:

546. Ո՞ր հավասարումն են անվանում իռացիոնալ հավասարում: Ինչպե՞ս կարելի է լուծել իռացիոնալ հավասարումը:

547. Բացատրեք, թե ինչո՞ւ հավասարումը քառակուսի բարձրացնելիս կարող են առաջանալ կողմնակի արմատներ:

548. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի արմատատակ արտահայտությունը:

549. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\sqrt{3x-1}=0$; բ) $\sqrt{4x+5}=2$; գ) $\sqrt{7-3x}=1$;

դ) $\sqrt{-x-1}=3$; ե) $\sqrt{-4+5x}=2$; զ) $\sqrt{-x}=\frac{1}{2}$:

550. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\sqrt{x}=3$; բ) $\sqrt{x}=0$; գ) $\sqrt{x}=-1$;

դ) $\sqrt{2x}=1$; ե) $\sqrt{4x-1}=1$; զ) $\sqrt{x+2}=1$;

է) $\sqrt{3x-8}=6$; ը) $\sqrt{1+5x}=7$; թ) $\sqrt{x-3}-2=0$:

551. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում սկզբնական հավասարման հետևանք-հավասարում:
բ) Սկզբնական հավասարման արմատներն արդյո՞ք հետևանք-հավասարման արմատներն են:
գ) Կարո՞ղ է արդյոք հետևանք-հավասարումն ունենալ արմատ, որը սկզբնական հավասարման արմատ չլինի:
դ) Ո՞ր ձևափոխություններն են բերում հետևանք-հավասարումների:
ե) Ստացված արմատների ստուգումը արդյո՞ք հավասարման լուծման պարտադիր մասն է, եթե լուծման ընթացքում հավասարումից անցում է կատարվել հետևանք-հավասարման:

552. Բացատրեք՝ առաջին հավասարումից երկրորդին անցման ընթացքում ինչպիսի՞ ձևափոխություններն են բերում կողմնակի արմատների առաջացմանը: Ընտրեք երկրորդ հավասարման արմատ, որը կողմնակի է առաջին հավասարման համար:

ա) $x=2$, $x^2=4$;

բ) $\frac{(x-4)-(2x-3)}{x^2-1}=0$, $(x-4)-(2x-3)=0$;

գ) $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-4$, $x=-4$;

դ) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}=0$, $(x-2)(x-3)=0$;

ե) $\frac{x-1}{\sqrt{x-2}}=0$: $x-1=0$:

553. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}$; բ) $\sqrt{-4x+5}=\sqrt{-x+1}$;

գ) $\sqrt{3-3x}=\sqrt{4x-10}$; դ) $\sqrt{-3x-3}=\sqrt{-2x-9}$;

ե) $\sqrt{5x+2}=\sqrt{x}$; զ) $\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x}$:

554. Լուծեք հավասարումը..

ա) $5(7-3\sqrt{x})-3(2x-5\sqrt{x})=41$;

բ) $2(3-5\sqrt{x})-5(x-2\sqrt{x})=x$;

գ) $-3(1-2\sqrt{-x-1})-6(\sqrt{-x-1}+x)=1$;

դ) $1+\sqrt{x}=3-(2x-\sqrt{x})$:

555. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}}=0$; բ) $\dfrac{4x-3}{\sqrt{-x}}=0$; գ) $(3-3x)\sqrt{x}=0$;

դ) $(2-x)\sqrt{-1-x}=0$; ե) $\dfrac{6x}{3\sqrt{x}}=0$:

⌈556. Ապացուցեք, որ հավասարումն արմատներ չունի.

ա) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3$; բ) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;

գ) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-1}=1$; դ) $\sqrt{3x-4}+\sqrt{10-15x}=8$;

ե) $\sqrt{x}+2x^2+3=0$; զ) $2\sqrt{2x+3}+x^2-1=-2$:

557. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\sqrt{2x-3}+4=14-\sqrt{8x-12}$; բ) $5\sqrt{4x+1}-8\sqrt{16+64x}=0$;

գ) $3+\sqrt{x-3}=4-\sqrt{4x-12}$; դ) $2\sqrt{3x-8}-\sqrt{6x-16}=0$:⌋

Բ. *Պարզագույն իռացիոնալ անհավասարումների լուծումը*

Նախ վերհիշենք մեկ անհայտով անհավասարումների հետ առնչվող հիմնական գաղափարները.

1. x անհայտով անհավասարման ***լուծում*** կոչվում է այն թիվը, որը տեղադրելով այդ անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն՝ ստանում ենք ճշմարիտ թվային անհավասարություն:
2. ***Լուծել անհավասարումը*** նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ցույց տալ, որ լուծումներ չկան:
3. x անհայտ պարունակող երկու անհավասարումներ կոչվում են ***համարժեք,*** եթե առաջին անհավասարման ցանկացած լուծում երկրոր-

դի լուծում է, իսկ երկրորդ անհավասարման ցանկացած լուծում առաջինի լուծում է: Այլ խոսքով, երկու անհավասարումներ համարժեք են, եթե այդ անհավասարումների բոլոր լուծումների բազմությունները համընկնում են: Մասնավորապես երկու անհավասարումներ համարժեք են, եթե դրանցից յուրաքանչյուրը լուծում չունի:

Մի անհավասարման փոխարինումը իրեն համարժեք անհավասարումով անվանում են անհավասարման համարժեք ձևափոխություն:

Եթե անհավասարման լուծման ընթացքում կատարված է անհավասարման համարժեք ձևափոխություն, ապա ձևափոխված անհավասարման լուծումների բազմությունը համընկնում է սկզբնական անհավասարման լուծումների բազմության հետ:

Թվարկենք անհավասարումների հիմնական համարժեք ձևափոխությունները՝

ա) Անհավասարման անդամի տեղափոխությունը (հակադիր նշանով) անհավասարման մի մասից մյուսը:

բ) Անհավասարման երկու մասերի բազմապատկում միևնույն դրական թվով (կամ բաժանում միևնույն դրական թվի վրա):

գ) Նույնությունների կիրառություն:

Հաշվի առնելով վերը ասվածը՝ քննարկենք անհավասարումներ, որոնցում անհայտը գտնվում է արմատանշանի տակ: Այդպիսի անհավասարումները անվանում են ***իռացիոնալ անհավասարումներ:***

Պարզագույն իռացիոնալ անհավասարումներն են $\sqrt{x} < a$ և $\sqrt{x} > a$, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Նախ դիտարկենք $\sqrt{x} < a$ անհավասարումը:

Եթե $a \leqslant 0$, ապա ըստ թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանման, անհավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a > 0$, ապա, ըստ բնական ցուցիչով աստիճանների հատկությունների, այս անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 < a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < a^2, \end{cases}$$

որը լուծելով՝ ստանում ենք $0 \leqslant x < a^2$ պատասխանը:

Այժմ դիտարկենք $\sqrt{x} > a$ անհավասարումը, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Եթե $a < 0$, ապա, անհավասարման լուծում է x փոփոխականի ցանկացած արժեք, որի համար $\sqrt{x}$-ը իմաստ ունի, այսինքն x-ի ցանկացած ոչ բացասական արժեք, որովհետև ըստ թվաբանական արմատի սահմանման, այդ դեպքում (այսինքն $x \geqslant 0$ դեպքում) $\sqrt{x} \geqslant 0$ և հետևաբար $\sqrt{x}$-ը մեծ կլինի ցանկացած a բացասական թվից, այսինքն տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը $[0; +\infty)$ միջակայքն է:

Եթե $a \geqslant 0$, ապա, հաշվի առնելով բնական ցուցիչով աստիճանների հատկությունները, ստանում ենք, որ $\sqrt{x} > a$ անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 > a^2, \end{cases}$$

որտեղից ստանում ենք $x > a^2$ պատասխանը:

Այժմ լուծենք պարզագույն ոչ խիստ $\sqrt{x} \leqslant a$ և $\sqrt{x} \geqslant a$ անհավասարումները, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Նախ լուծենք

$$\sqrt{x} \leqslant a \qquad (1)$$

ոչ խիստ անհավասարումը:

Եթե $a < 0$, ապա, ըստ թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանման՝ $\sqrt{x} \geqslant 0$ և հետևաբար (1) անհավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a > 0$, ապա հաշվի առնելով, որ քառակուսի արմատի տակ գտնվող արտահայտությունը չի կարող լինել բացասական և նորից կիրառելով բնական ցուցիչով աստիճանի հատկությունները, ստանում ենք, որ (1) անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 \leqslant a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant a^2, \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումների բազմությունը $x \in [0;\ a^2]$ միջակայքն է (եթե $a > 0$):

Դիտողություն. Պարզ է, որ $a = 0$ դեպքում $\sqrt{x} \leqslant 0$ անհավասարման լուծումների բազմությունը միակ $x = 0$ թիվն է:

Օրինակ՝ $\sqrt{2x - 1} \leqslant 0$ անհավասարումը հնարավոր է միայն $2x - 1 = 0$ դեպքում, այսինքն այդ անհավասարման լուծումների բազմությունը բաղկացած է մի կետից՝ $x = \dfrac{1}{2}$:

Քննարկենք

$$\sqrt{x} \geqslant a \qquad (2)$$

ոչ խիստ անհավասարումը:

Եթե $a < 0$, ապա, ինչպես և խիստ անհավասարման դեպքում էր, այս անհավասարման լուծում է հանդիսանում x-ի ցանկացած ոչ բացասական արժեք՝ $x \geqslant 0$:

Եթե $a \geqslant 0$, ապա կրկնելով (1) անհավասարման համար կատարված դատողությունները, կստանանք, որ (2) անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant a^2, \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումների բազմությունը $[a^2; +\infty)$ միջակայքն է:

Ինչպես և իռացիոնալ հավասարումների դեպքում էր, հարկ է նկատի ունենալ, որ քառակուսի արմատ պարունակող անհավասարումներում արմատի տակ գտնվող արտահայտությունները չեն կարող լինել բացասական: Դա երբեմն կարող է նպաստել անհավասարումը լուծում չունենալու փաստի բացահայտմանը:

Օրինակ, լուծենք

$$3\sqrt{4+x} - 2\sqrt{-5-x} > 3$$

անհավասարումը:

Հաշվի առնելով վերը ասվածը՝ կստանանք, որ եթե որևէ x թիվ հանդիսանում է այս անհավասարման լուծում, ապա այն պետք է բավարարի

$$\begin{cases} 4+x \geqslant 0, \\ -5-x \geqslant 0 \end{cases}$$

համակարգին, որը, ակնհայտ է, լուծում չունի: Հետևաբար լուծումներ չունի նաև սկզբնական անհավասարումը:

Դիտարկենք իռացիոնալ անհավասարումների մի քանի այլ օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$2\sqrt{4+x} > \sqrt{2x+5} \qquad (3)$$

անհավասարումը:

Հաշվի առնելով վերը նշված դատողությունները՝ ստանում ենք, որ այս անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 4x+3 \geqslant 0, \\ 2x+5 \geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{4x+3}\right)^2 > \left(\sqrt{2x+5}\right)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{3}{4}, \\ x \geqslant -\dfrac{5}{2}, \\ 4(4x+3) > 2x+5 \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումների բազմությունը $x > -\dfrac{1}{2}$ պայմանին բավարարող թվերի բազմությունն է, այսինքն ստանում ենք՝

Պատասխան՝ $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$:

Պարզ է, որ եթե (3) անհավասարման մեջ «>» նշանի փոխարեն լիներ «⩾»,

«<» կամ «⩽» նշանը, ապա լուծումը կտարվեր նույն կերպ՝ փոխելով միայն համակարգի երրորդ անհավասարման նշանը համապատասխան ձևով:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$(5x+1)\sqrt{10x+17}>0 \qquad (4)$$

անհավասարումը:

Օգտվենք հետևյալ կարևոր փաստերից (որը կօգտագործենք նաև հետագայում)

ա) $f(x)\cdot g(x)>0$ և $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ անհավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0 \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

բ) $f(x)\cdot g(x)<0$ և $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ անհավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)<0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)>0 \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Ուստի (4) անհավասարումը համարժեք է

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+1>0, \\ \sqrt{10x+17}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+1<0, \\ \sqrt{10x+17}<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

միավորմանը: Ինչպես արդեն գիտենք $\sqrt{10x+17}<0$ անհավասարումը լուծում չունի, հետևաբար պետք է լուծել միայն

$$\begin{cases} 5x+1>0, \\ \sqrt{10x+17}>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x+1>0, \\ 10x+17>0 \end{cases}$$

համակարգը, որի լուծումների բազմությունն է՝ $x>-\dfrac{1}{5}$:

Պատասխան՝ $\left(-\dfrac{1}{5};+\infty\right)$:

Օրինակ 3. Լուծենք

$$\frac{\sqrt{6+2x}}{x-4}\geqslant 0 \qquad (5)$$

անհավասարումը:

Ըստ ոչ խիստ անհավասարումների լուծման ալգորիթմի՝ պետք է առանձին-առանձին լուծել

$$\frac{\sqrt{6+2x}}{x-4}=0 \qquad (6)$$

հավասարումը և

$$\frac{\sqrt{6+2x}}{x-4}>0 \qquad (7)$$

անհավասարումը ու ստացված լուծումների բազմությունները միավորել: Իսկ դրանցից յուրաքանչյուրի լուծման եղանակին մենք արդեն ծանոթ ենք: (6) հավասարման լուծում է հանդիսանում

$x = -3$ թիվը, իսկ (7) անհավասարման լուծումների բազմությունը $(4, +\infty)$ միջակայքն է:

Պատասխան՝ $\{-1\}\cup(4; +\infty)$:

Դիտողություն. Նկատեք, որ ի տարբերություն իռացիոնալ հավասարումների՝ իռացիոնալ անհավասարումներում նպատակահարմար չէ անցնել հետևանք-անհավասարումների, որովհետև այս դեպքում ստացված լուծումների ստուգումը սկզբնական անհավասարման մեջ կապված է մեծ դժվարությունների հետ (հիմնականում լուծումների բազմությունը անվերջ քանակությամբ կետեր պարունակելու պատճառով):

558. Ո՞ր անհավասարումներն են անվանում իռացիոնալ:

559. Նկարագրեք $\sqrt{x} > a$ և $\sqrt{x} < a$ անհավասարումների լուծման եղանակները:

560. Լուծեք հետևյալ անհավասարումները.
ա) $\sqrt{x} < -3$; բ) $\sqrt{x} < 3$; գ) $\sqrt{x} > -4$; դ) $\sqrt{x} > 5$:

561. Լուծեք հետևյալ ոչ խիստ անհավասարումները.
ա) $\sqrt{x} \leqslant -5$; բ) $\sqrt{x} \leqslant 1{,}1$; գ) $\sqrt{x} \geqslant 0$; դ) $\sqrt{x} \geqslant -3$:

562. Լուծեք անհավասարումները.
ա) $\sqrt{3x+1} < -3$; բ) $3\sqrt{x-3} - \sqrt{1-x} > -1$;
գ) $\sqrt{7x-2} \geqslant -3$; դ) $2\sqrt{3x+5} < 1$;
ե) $3\sqrt{3x-1} < 2\sqrt{1-x}$; զ) $\sqrt{4x-3} - 2 > 0$:

563. Ապացուցեք, որ անհավասարումը լուծումներ չունի.

ա) $\sqrt{5+3x} < -3$; բ) $\sqrt{7-4x} \leqslant -1$;

գ) $\sqrt{3-x} \geqslant \sqrt{x-10}$; դ) $\sqrt{6x-3} < 0$;

ե) $\sqrt{x+2} + \sqrt{-x-2} < 0$:

564. Լուծեք անհավասարումները և ոչ խիստ անհավասարումները.

ա) $\sqrt{3+11x} > 2$; բ) $\sqrt{4+5x} \geqslant 3$;

գ) $\sqrt{7x-2} < 3$; դ) $\sqrt{31+9x} \leqslant 1$:

565. Լուծեք անհավասարումները և ոչ խիստ անհավասարումները.

ա) $\sqrt{10x+3} > \sqrt{2x-1}$; բ) $\sqrt{2+7x} \geqslant 3\sqrt{4+x}$;

գ) $\sqrt{12x+1} < 4\sqrt{2+5x}$; դ) $2\sqrt{3+21x} - 5\sqrt{x-2} \leqslant 0$:

566. Լուծեք անհավասարումները և ոչ խիստ անհավասարումները.

ա) $(x-1)\sqrt{x+13} > 0$; բ) $(2x+1)\sqrt{2-4x} \leqslant 0$;

գ) $(5x+6)\sqrt{2x-1} < 0$; դ) $(x-4)\sqrt{6+2x} \geqslant 0$:

567. Լուծեք անհավասարումը.

ա) $x\sqrt{2x+3} > x$; բ) $4x\sqrt{6+4x} \geqslant x$;

գ) $6x\sqrt{8x-1} < x$; դ) $3x\sqrt{10+2x} \leqslant 5x$:

568. Լուծեք անհավասարումները և ոչ խիստ անհավասարումները.

ա) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}} > 0$; բ) $\dfrac{\sqrt{1+10x}}{\sqrt{x-1}} \geqslant 0$;

գ) $\dfrac{\sqrt{12x+1}}{\sqrt{21+x}} < 0$; դ) $\dfrac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{1-3x}} \leqslant 0$;

ե) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1} > 0$; զ) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{2-x} < 0$;

է) $\dfrac{\sqrt{-x}-2}{-2-x} > 0$; ը) $\dfrac{\sqrt{-x}-3}{x+2} < 0$:

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ԵՌԱՆԴԱՄ

$$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$
$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac$$

Քառակուսային եռանդամի հիմնական հատկությունները

6.1 Քառակուսային եռանդամի վերլուծումը գծային արտադրիչների

x-ի նկատմամբ

$$ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

տեսքի բազմանդամը, որտեղ a-ն, b-ն և c-ն տված թվեր են և $a \neq 0$, անվանում են ***քառակուսային եռանդամ:*** a թիվն անվանում են x^2-ու գործակից (կամ ավագ անդամի գործակից), b-ն՝ x-ի գործակից, c-ն՝ ազատ անդամ:

$\mathrm{D} = b^2 - 4ac$ թիվն անվանում են (1) ***քառակուսային եռանդամի պարբերիչ*** (դիսկրիմինանտ):

Թեորեմ 1. ***Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝***

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathrm{D}}{4a^2}\right]: \qquad (2)$$

Ապացույց: Փակագծերից դուրս բերելով a արտադրիչը (որը, ըստ պայմանի, զրոյից տարբեր է)՝ կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathrm{D}}{4a^2}\right]:$$

Նշենք, որ (2) ***հավասարությունը նույնություն է,*** քանի որ այն վերածվում է թվային հավասարության x-ի ցանկացած թվային արժեքի համար:

⌈Քառակուսային եռանդամի ներկայացումը (2) բանաձևով ընդունված է անվանել ***քառակուսային եռանդամից լրիվ քառակուսու առանձնացում:*** ⌋

Գործնականում սովորաբար (2) բանաձևից չեն օգտվում, այլ յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում կրկնում են այդ բանաձևի ապացույցում բերված դատողությունները:

Օրինակ՝

ա) $2x^2 + 4x + 34 = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 17) = 2\,[(x + 1)^2 + 16]$,

բ) $3x^2 + 18x + 27 = 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 3\,(x + 3)^2$,

գ) $2x^2 - 4x - 16 = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8) = 2\,[(x - 1)^2 - 9]$:

Թեորեմ 2. ***Եթե*** $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի*** D ***տարբերիչը դրական է, ապա այդ քառակուսային եռանդամը կարելի է վերլուծել արտադրիչների՝***

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2), \tag{3}$$

որտեղ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}: \tag{4}$$

Ապացույց: Թեորեմ 1-ում ցույց տրվեց, որ ճիշտ է (2) հավասարությունը: Քանի որ D > 0, ապա իմաստ ունի D թվից քառակուսի արմատը և տեղի ունի

$$\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$$

հավասարությունը:

Հետևաբար,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]: \tag{5}$$

(5) հավասարության աջ մասում քառակուսի փակագծերի մեջ գրված է քառակուսիների տարբերություն: Կիրառելով քառակուսիների տարբերության բանաձևը՝ կստանանք՝

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right] =$$

$$= a \cdot \left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\right] \cdot \left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\right]:$$

Այժմ, եթե նշանակենք

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

ապա կստանանք պահանջվող (3) հավասարությունը:

Նշենք, որ (3) ***հավասարությունը նույնություն է,*** քանի որ այն վերածվում է թվային հավասարության x-ի ցանկացած թվային արժեքի համար:

$(x - x_1)$ և $(x - x_2)$ արտադրիչները կոչվում են ***գծային արտադրիչներ,*** դրա համար էլ (3) վերլուծությունը հաճախ անվանում են ***քառակուսային եռանդամի վերլուծում գծային արտադրիչների:***

Նկատենք, որ քանի որ D > 0, ապա այդ գծային արտադրիչները իրարից տարբեր են:

Օրինակ.

$$2x^2 - 3x + 1 \qquad (6)$$

քառակուսային եռանդամը վերլուծենք գծային արտադրիչների:

Լուծում: Քանի որ $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, ապա, ըստ թեորեմ 2-ի, (6) քառակուսային եռանդամը կարելի է վերլուծել գծային արտադրիչների:

Հաշվենք x_1 և x_2 թվերը՝

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}:$$

Հետևաբար, $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$:

Թեորեմ 3. ***Եթե*** $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի*** D ***տարբերիչը հավասար է զրոյի, ապա այդ քառակուսային եռանդամը կարելի է վերլուծել երկու միատեսակ գծային արտադրիչների արտադրյալի:***

Ապացույց: Ինչպես հետևում է թեորեմ 1-ից, եթե D = 0, ապա

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2:$$

Այս հավասարությունն էլ հենց նշանակում է, որ քառակուսային եռանդամը վերլուծված է երկու միատեսակ՝ $x + \dfrac{b}{2a}$ տեսքի գծային արտադրիչների:

Թեորեմ 4: ***Եթե*** $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի*** D ***տարբերիչը բացասական է, ապա այդ եռանդամը*** x***-ի ցանկացած արժեքի դեպքում զրոյից տարբեր է, և այն հնարավոր չէ վերլուծել գծային արտադրիչների:***

Ապացույց: Իրոք, եթե $D < 0$, ապա $\frac{-D}{4a^2} > 0$, և քանի որ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, ապա (2) հավասարության քառակուսի փակագծերի մեջ գտնվող արտահայտությունը դրական է x-ի ցանկացած արժեքի համար՝

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a^2}\right) > 0:$$

Բազմապատկելով այս անհավասարությունը a-ով՝ կստանանք՝

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ եթե } a > 0$$

և

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ եթե } a < 0:$$

Թեորեմ 4-ի առաջին պնդումն ապացուցված է:

Թեորեմի երկրորդ պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Դիցուք $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը փոքր է 0-ից ($D < 0$), բայց այդ եռանդամը կարելի է գրել

$$a(x - m)(x - n)$$

տեսքով, որտեղ m-ը և n-ը իրական թվեր են: Այդ դեպքում $x = m$ և $x = n$ արժեքների համար այդ արտադրյալը հավասար է զրոյի, նշանակում է զրոյի է հավասար նաև եռանդամը, ինչը հակասում է վերը ապացուցածին: Հետևաբար, $D < 0$ պայմանի դեպքում քառակուսային եռանդամը հնարավոր չէ վերլուծել գծային արտադրիչների:

Այսպիսով, քառակուսային եռանդամը՝

1) $D > 0$ դեպքում վերլուծվում է երկու իրարից տարբեր գծային արտադրիչների,
2) $D = 0$ դեպքում վերլուծվում երկու միատեսակ գծային արտադրիչների,
3) $D < 0$ դեպքում չի վերլուծվում գծային արտադրիչների:

Դիտողություն 1: Առանձնացնենք թեորեմ 4-ում ստացված մի կարևոր փաստ՝

$D < 0$ դեպքում $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի բոլոր թվային արժեքները, որոնք համապատասխանում են x-ի ցանկացած թվային արժեքներին, ունեն նույն նշանը, այն է՝

$a > 0$ դեպքում $ax^2 + bx + c > 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար,

$a < 0$ դեպքում $ax^2 + bx + c < 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, այլ կերպ ասած, եռանդամի նշանը համընկնում է a-ի նշանի հետ:

Դիտողություն 2. Թեորեմ (1)-ում ապացուցված (2) բանաձևից կարելի է ստանալ այսպիսի հետևություններ.

1.° Եթե $a > 0$, ապա $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի բոլոր հնարավոր թվային արժեքների բազմության մեջ չկա ***ամենամեծ թիվը,*** իսկ ***ամենափոքրը գոյություն ունի.*** այն հավասար է $-\dfrac{D}{4a}$ և ստացվում է $x = -\dfrac{b}{2a}$ արժեքի դեպքում (այս դեպքում ընդունված է $-\dfrac{D}{4a}$ թիվը անվանել ***քառակուսային եռանդամի փոքրագույն արժեք):***

Իրոք, (2) հավասարության աջ մասը գրելով

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

տեսքով և հաշվի առնելով, որ $-\dfrac{D}{4a}$-ն կախված չէ x-ի արժեքից (հաստատուն թիվ է), տեսնում ենք, որ $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը 0 է և ստացվում է $x = -\dfrac{b}{2a}$ դեպքում (քանի որ $a > 0$): Մյուս կողմից $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ արտահայտությունը կարող է ընդունել ցանկացած թվից մեծ արժեք (x-ի արժեքի հարմար ընտրության շնորհիվ):

Նույն կերպ ցույց է տրվում, որ

2.° Եթե $a < 0$, ապա $ax^2 + bx + c$ եռանդամը ***փոքրագույն արժեք չունի,*** իսկ ***մեծագույն արժեք ունի,*** այն հավասար է $-\dfrac{D}{4a}$ և ստացվում է $x = -\dfrac{b}{2a}$ արժեքի դեպքում:⌋

569. Ի՞նչն են անվանում քառակուսային եռանդամ, քառակուսային եռանդամի տարբերիչ (դիսկրիմինանտ):

570. Բերեք քառակուսային եռանդամի օրինակ, որի տարբերիչը՝
ա) մեծ է զրոյից, բ) հավասար է զրոյի, գ) փոքր է զրոյից:

571. Անվանեք քառակուսային եռանդամի a, b և c գործակիցները՝
ա) $3x^2 + 4x + 5$; բ) $2x^2 - 5x - 7$; գ) $-5x^2 + 3x - 1$;
դ) $6x^2 + x - 2$; ե) $x^2 - x + 7$; զ) $-x^2 + x + 1$:

572. Կազմեք քառակուսային եռանդամ տված գործակիցներով՝
ա) $a = 3, b = 4, c = 5$; բ) $a = 3, b = -2, c = 6$;
գ) $a = 1, b = -1, c = 2$; դ) $a = -1, b = 3, c = -2$:

573. Հաշվեք քառակուսային եռանդամի տարբերիչը՝
ա) $2x^2 + 5x + 3$; բ) $2x^2 - 5x + 3$; գ) $2x^2 + 5x - 3$;
դ) $2x^2 - 5x - 3$; ե) $x^2 - 4x + 5$; զ) $x^2 + 6x + 9$;
է) $x^2 + 2x + 1$; ը) $-3x^2 + 5x - 2$; թ) $x^2 + 2x + 2$:

574. Առանձնացրեք լրիվ քառակուսի՝
ա) $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 5 = (x-2)^2 + 1$;
բ) $2x^2 + 6x - 5 = 2(x^2 + 3x - 2{,}5) = 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2{,}5\right) =$
$= 2(x + 1{,}5)^2 - 4{,}75)$;
գ) $x^2 - 8x + 17$; դ) $x^2 + 4x + 4$; ե) $x^2 + 5x - 6$;
զ) $x^2 - 3x + 2$; է) $2x^2 - 8x + 7$; ը) $-4x^2 + 4x - 3$;
թ) $3x^2 - 2x + 1$; ժ) $3x^2 - 6x + 1$; ի) $-2x^2 - 8x + 10$:

575. Վերլուծվո՞ւմ է արդյոք քառակուսային եռանդամը գծային արտադրիչների, եթե նրա տարբերիչը
ա) դրական է, բ) հավասար է զրոյի, գ) բացասական է:

576. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի քառակուսային եռանդամի տարբերիչը, որպեսզի այն վերածվի
ա) իրարից տարբեր գծային արտադրիչների,
բ) միատեսակ գծային արտադրիչների:

577. Պարզեք՝ վերլուծվո՞ւմ է արդյոք քառակուսային եռանդամը գծային արտադրիչների.
ա) $x^2 - 4x + 3$; բ) $x^2 - 4x + 4$; գ) $x^2 + 4x + 5$;
դ) $3x^2 - 4x + 1$; ե) $5x^2 - 6x + 1$; զ) $4x^2 + 4x + 2$:

578. Քառակուսային եռանդամը վերլուծեք գծային արտադրիչների.
ա) $2x^2 - 5x + 3$; բ) $3x^2 + 5x - 2$; գ) $5x^2 - 2x - 3$;
դ) $x^2 - 7x + 6$; ե) $x^2 + 6x - 7$; զ) $x^2 + x - 2$:
Ցուցում: Օգտվեք $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ հավասարությունից, որտեղ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}:$$

579. Քառակուսային եռանդամը վերլուծեք արտադրիչների, եթե դա հնարավոր է (իսկ եթե հնարավոր չէ, նշեք պատճառը).
ա) $x^2 + 8x + 15$; բ) $4x^2 - 4x + 1$; գ) $2x^2 - 3x + 4$:

580. Ապացուցեք, որ քառակուսային եռանդամի արժեքները x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում զրոյից տարբեր են:

Օրինակ: $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0$, x-ի ցանկացած արժեքի համար:

$-x^2 - 4x - 5 = -(x^2 + 4x + 4 + 1) = -((x + 2)^2 + 1) < 0$, x-ի ցանկացած արժեքի համար

ա) $3x^2 - x + 1$; բ) $-5x^2 + 2x - 10$;

գ) $-x^2 + 5x - 7$; դ) $x^2 + 6x + 10$:

581. Ապացուցեք, որ կգտնվի x-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $x^2 - 7x + 6$ քառակուսային եռանդամի արժեքը

ա) դրական է, բ) բացասական է, գ) հավասար է զրոյի:

582. Գտեք քառակուսային եռանդամի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $1 - x^2$; բ) $2x + 3x^2$; գ) $3x^2 - 1$; դ) $4 - 8x + x^2$;

ե) $-x^2 + 2x - 1$; զ) $9 + 5x^2$; է) $-x^2$; ը) $(4 - 4x)^2 + 1$;

թ) $(1 + 2x)(1 - 3x)$; ժ) $(6 - 2x)x - 3$:

Կրճատեք կոտորակը (583-585).

583. ա) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$; բ) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$; գ) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

դ) $\dfrac{x+3}{x^2-9}$; ե) $\dfrac{2x+2}{x^2+2x+1}$; զ) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3+1}$:

584. ա) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$; բ) $\dfrac{x+1}{x^2-5x-6}$; գ) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4x+3}$;

դ) $\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; ե) $\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$; զ) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-2x-3}$:

585. ա) $\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+5x-7}$; բ) $\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+7x-9}$;

գ) $\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2+5x+2}$; դ) $\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-5x+2}$:

586. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2-1}$; բ) $\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$;

գ) $\dfrac{4x}{x^2 - x - 2} - \dfrac{1}{x + 1}$; դ) $\dfrac{2x}{x^2 - x - 2} - \dfrac{5}{x - 2}$;

ե) $\dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{3}{x^2 - x - 6}$; զ) $\dfrac{3}{x + 5} - \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2 + 4x - 5}$:

6.2 Քառակուսային հավասարման գաղափարը

x ***անհայտով քառակուսային հավասարում անվանում են այն հավասարումը, որի ձախ մասը*** *x*-***ի նկատմամբ քառակուսային եռանդամ է, իսկ աջ մասը՝ զրո:***

Քառակուսային հավասարումն անվանում են նաև ***երկրորդ աստիճանի հավասարում:***

Հետևյալ հավասարումները՝

$$2x^2 - 3x - 7 = 0, \quad 2x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 4x = 0,$$
$$-x^2 + 11 = 0, \quad -5x^2 + 3x + 5 = 0$$

հանդիսանում են x անհայտով քառակուսային հավասարումներ:

Դիտարկենք *ընդհանուր տեսքով գրված մեկ անհայտով քառակուսային հավասարումը*՝

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0,} \qquad (1)$$

որտեղ a, b և c-ն տված թվեր են ($a \neq 0$): a-***ն կոչվում է*** x^2-***ու գործակից,*** b-***ն*** x-***ի գործակից,*** c-***ն (1) հավասարման ազատ անդամ:***

ax^2, bx և c արտահայտություններն անվանում են ***(1) հավասարման անդամներ:*** $D = b^2 - 4ac$ թիվն անվանում են ***(1) քառակուսային հավասարման տարբերիչ (դիսկրիմինանտ):***

Այսպես,

$$2x^2 - 3x - 7 = 0$$

հավասարման մեջ 2-ը x^2-ու գործակիցն է, -3-ը՝ x-ի գործակիցը, -7-ը՝ ազատ անդամը, $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2\,(-7) = 65$-ը՝ տարբերիչը,

$$x^2 - 3 = 0$$

հավասարման մեջ 1-ը x^2-ու գործակիցն է, 0-ն՝ x-ի գործակիցը, -3-ը՝ ազատ անդամը, $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 12$-ը՝ տարբերիչը:

Հիշեցնենք, որ x ***անհայտով հավասարման արմատ (կամ լուծում), անվանում են այն թիվը, որը հավասարման մեջ*** x-***ի փոխարեն տեղադրելով ստացվում է թվային հավասարություն:***

Օրինակ, 0 թիվը

$$2x^2 - 7x = 0$$

հավասարման արմատ է, որովհետև այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 0՝ ստանում ենք ստույգ թվային հավասարություն՝

$$2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 = 0$$

Լուծել հավասարումը նշանակում է գտնել նրա բոլոր արմատները կամ ցույց տալ, որ արմատներ չկան:

Հաջորդ կետերում ցույց կտրվի, թե ինչպես պետք է լուծել քառակուսային հավասարումը, այսինքն ինչպես պետք է գտնել նրա արմատները:

Հավասարումները լուծելիս հարկ է լինում հավասարման երկու մասը բազմապատկել միևնույն՝ զրոյից տարբեր թվով կամ բաժանել միևնույն՝ զրոյից տարբեր թվի վրա, ինչպես նաև հավասարման անդամները նրա մի կողմից տեղափոխել մյուս կողմ: Արդյունքում կստացվեն սկզբնական հավասարմանը ***համարժեք*** հավասարումներ, այսինքն հավասարումներ, որոնք ունեն միայն և միայն այն արմատները, ինչը որ ուներ սկզբնական հավասարումը (կամ արմատ չունեն, եթե սկզբնական հավասարումը արմատ չուներ): Այս պնդումների ապացույցները կատարվում են ճիշտ այնպես, ինչպես դա արվեց գծային հավասարումների դեպքում:

587. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում քառակուսային հավասարում:
բ) Հետևյալ հավասարումների մեջ ցույց տվեք քառակուսային կամ քառակուսայինի համարժեք հավասարումները՝

1) $3x^2 - 2x + 1 = 0$;	2) $4 = x^2$;
3) $2x - 8 = 0$;	4) $x(x - 1) = 3$;
5) $\dfrac{1}{x} - 2 = 0$;	6) $x^2 + 3x = 0$;
7) $-0{,}5x + 3x^2 - 7 = 0$;	8) $12x - 3x^2 + 5 = 0$:

588. 608. բ) խնդրի քառակուսային հավասարումներում որոշեք a, b գործակիցները և c ազատ անդամը:

589. Անվանեք քառակուսային հավասարման անդամները, x^2-ու և x-ի գործակիցները և ազատ անդամը՝

ա) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;	բ) $x^2 - 5x + 1 = 0$;
գ) $x^2 - 9 = 0$;	դ) $x^2 - 9x = 0$:

590. Կազմեք $ax^2 + bx + c = 0$ քառակուսային հավասարում, եթե նրա գործակիցները հավասար են՝

ա) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;	բ) $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$;

գ) $a = -1$, $b = 0{,}5$, $c = \frac{1}{3}$;   դ) $a = 5$, $b = 2$, $c = 0$;

ե) $a = 1$, $b = 0$, $c = 7$;   զ) $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -8$:

591. Հաշվեք քառակուսային հավասարման տարբերիչը.
ա) $2x^2 - 3x - 5 = 0$;   բ) $x^2 + 5x + 1$;
գ) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;   դ) $x^2 + x + 1 = 0$:

592. Ստուգեք՝ 0 թիվը հավասարման արմա՞տ է.
ա) $x^2 - 5x = 0$;   բ) $x^2 + 1 = 0$;
գ) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;   դ) $x^2 - 5 = 0$;
ե) $x^2 + x = 0$;   զ) $x^2 + 10x + 0{,}1 = 0$:

593. Ստուգեք՝ 1 և −1 թվերից գոնե մեկը հավասարման արմա՞տ է.
ա) $x^2 + x = 0$;   բ) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
գ) $x^2 - 4x + 4 = 0$;   դ) $x^2 - x = 0$;
ե) $x^2 + 6x + 5 = 0$;   զ) $x^2 - 1 = 0$:

594. $-1, -\frac{1}{3}, 0, 1, 2$ թվերից ընտրեք հավասարման արմատները.
ա) $x^2 - x - 2 = 0$;   բ) $x^2 + x = 0$;
գ) $3x^2 = -x$;   դ) $3x^2 + 5x = 0$;
ե) $4x - 5 = -6 - 3x^2$;   զ) $2x + x^2 = -2 - x$:

595. Ընտրեք հավասարման գոնե մեկ արմատ.
ա) $x^2 - 4 = 0$;   բ) $x^2 - 4x = 0$;
գ) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;   դ) $5x^2 - x - 6 = 0$:

596. Ո՞ր հավասարումներն են անվանում համարժեք:

597. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.
ա) $2x^2 = 5x$ և $2x^2 - 5x = 0$;
բ) $7x^2 = 28$ և $x^2 = 4$;
գ) $x^2 - 8x + 8 = 3x^2 - 8$ և $x^2 + 4x - 8 = 0$;
դ) $(x - 1)(x + 5) = 2(x - 1)$ և $x + 4 = 1$;
ե) $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 4$ և $3x - 5 = 4$;
զ) $(x - 2)x = x$ և $x - 1 = 2$:

6.3. Թերի քառակուսային հավասարումներ

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

քառակուսային հավասարումը անվանում են ***թերի,*** եթե b և c թվերից գոնե մեկը հավասար է զրոյի: Այս կետում դիտարկվում են թերի քառակուսային հավասարումների լուծումները:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$x^2 = 0 \tag{1}$$

հավասարումը:

Գոյություն ունի միայն մեկ թիվ՝ 0-ն, որի քառակուսին հավասար է 0: Հետևաբար (1) հավասարումն ունի միակ արմատ՝ $x_0 = 0$:

Թերի քառակուսային հավասարումը, որում $b = c = 0$, այսինքն

$$ax^2 = 0 \ (a \neq 0),$$

հավասարումը համարժեք է (1) հավասարմանը և, հետևաբար, նույնպես ունի միակ արմատ՝ $x_0 = 0$:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$x^2 - 5 = 0 \tag{2}$$

հավասարումը:

Այս հավասարումը համարժեք է

$$x^2 = 5$$

հավասարմանը:

Հետևաբար մեզ անհրաժեշտ է գտնել բոլոր այն թվերը, որոնց քառակուսիները հավասար են 5 թվին: Այդպիսի թվեր միայն երկուսն են՝ $\sqrt{5}$ և $-\sqrt{5}$-ը:

Այսպիսով, (2) հավասարումն ունի երկու արմատներ՝

$$x_1 = \sqrt{5} \text{ և } x_2 = -\sqrt{5},$$

և ուրիշ այլ արմատներ չունի:

Բայց կարելի է դատել այլ կերպ: (2) հավասարումը կարելի է գրել

$$x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

տեսքով կամ

$$\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$$

տեսքով, որտեղից և տեսնում ենք, որ $x_1 = \sqrt{5}$ և $x_2 = -\sqrt{5}$ թվերը (2) հավասարման արմատներ են: (2) հավասարումն այլ արմատներ չունի, որովհետև եթե նրա մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $\sqrt{5}$-ից և $-\sqrt{5}$-ից տարբեր ցանկացած թիվ, ապա (2) հավասարման ձախ մասը 0-ից տարբեր կլինի:

Օրինակ 3. Լուծենք

$$x^2 + 7 = 0 \tag{3}$$

հավասարումը:

Ակնհայտ է, որ այս հավասարումն արմատներ չունի: Չէ՞ որ ցանկացած x_0 իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական է, և հետևաբար $x_0^2 + 7$-ը դրական թիվ է: Այլ խոսքերով, ոչ մի x_0 իրական թիվ չի կարող հանդիսանալ (3) հավասարման արմատ: Այսպիսով, մենք ***լուծեցինք*** (3) հավասարումը, որովհետև ցույց տվեցինք, որ այն իրական արմատներ չունի:

Թերի քառակուսային հավասարումը, որում $b = 0$, ունի

$$ax^2 + c = 0 \ (a \neq 0) \tag{4}$$

տեսքը: Այս հավասարումը համարժեք է

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0 \tag{5}$$

հավասարմանը:

Պարզ է, որ եթե $\frac{c}{a}$-ն դրական թիվ է, ապա, ինչպես 3-րդ օրինակում, (5) հավասարումը և հետևաբար նրան համարժեք (4) հավասարումը արմատներ չունի:

Դիցուք այժմ $\frac{c}{a}$-ն բացասական թիվ է: (5) հավասարումը համարժեք է

$$x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0 \tag{6}$$

հավասարմանը: Քանի որ $-\frac{c}{a}$-ն դրական թիվ է, ապա (6) հավասարումը, և հետևաբար նրան համարժեք (5) հավասարումը համարժեք են

$$\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0$$

հավասարմանը, որը ունի երկու արմատներ՝

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

և ուրիշ արմատներ չունի:

$c = 0$ դեպքում (4) հավասարումը, ինչպես արդեն գիտենք, ունի $x = 0$ միակ արմատը:

Օրինակ 4. Լուծենք

$$x^2 - 3x = 0 \tag{7}$$

հավասարումը:

(7) հավասարումը արտագրենք

$$x(x - 3) = 0 \tag{8}$$

տեսքով:

Ակնհայտ է, այս հավասարումն ունի $x_1 = 0$ և $x_2 = 3$ արմատներ: Այլ արմատներ հավասարումը չունի, որովհետև նրա մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 0-ից և 3-ից տարբեր ցանկացած թիվ՝ (8) հավասարման ձախ մասում կստացվի 0-ից տարբեր թիվ:

Թերի քառակուսի հավասարումը, որում $c = 0$, $b \neq 0$ ունի

$$ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0) \tag{9}$$

տեսքը:

Այդ հավասարումը համարժեք է

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = 0 \tag{10}$$

հավասարմանը:

Այնպես, ինչպես 4-րդ օրինակում, ցույց է տրվում, որ (10) հավասարումը և հետևաբար նրան համարժեք (9) հավասարումն ունի երկու արմատներ՝

$$x_1 = 0 \text{ և } x_2 = -\frac{b}{a}$$

և այլ արմատներ չունի:

Բերված օրինակները ցույց են հալիս, որ թերի քառակուսային հավասարումը կարող է ունենալ մեկ կամ երկու արմատ և կարող է արմատներ չունենալ:

Հետագայում մենք կտեսնենք, որ ***ցանկացած քառակուսային հավասարում ունի կամ մեկ արմատ, կամ երկու արմատ, կամ արմատներ չունի:***

598. Ո՞ր հավասարումներն են անվանում թերի քառակուսային հավասարումներ:

599. Քանի՞ արմատ կարող է ունենալ թերի քառակուսային հավասարումը.

ա) $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0,\ c \neq 0)$; բ) $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$:

600. Լուծեք հավասարումը.

ա) $3(x^2 - 1) = 0$; բ) $2x^2 = 0$;

գ) $x(x - 1) = 0$; դ) $(x + 3)x = 0$;

ե) $(x - 3)(x + 2) = 0$; զ) $(x + 5)(x - 7) = 0$;

է) $3x(x - 0,5) = 0$; ը) $0,5x(2 + x) = 0$;

թ) $3(x - 8)(5 + x) = 0$; ժ) $0,8(x + 1)(x - 4) = 0$:

601. Լուծեք հավասարումը.

ա) $x^2 - 4x = 0$; բ) $x^2 + 6x = 0$; գ) $3x^2 + x = 0$;

դ) $x^2 - 0,5x = 0$; ե) $2x + 3x^2 = 0$; զ) $x - 2x = 0$;

է) $7x^2 = 5x$; ը) $3x = 11x^2$; թ) $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$:

Լուծեք հավասարումը (602-604).

602. ա) $2x^2 = 3$,

$x^2 = 1{,}5$,

$x^2 - 1{,}5 = 0$,

$x^2 - \left(\sqrt{1{,}5}\right)^2 = 0$,

$\left(x - \sqrt{1{,}5}\right)\left(x + \sqrt{1{,}5}\right) = 0$,

$x_1 = \sqrt{1{,}5}$, $x_2 = -\sqrt{1{,}5}$:

Պատ.՝ $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$:

բ) $x^2 - 9 = 0$;
գ) $x^2 - 25 = 0$;
դ) $16 - x^2 = 0$;
ե) $49 - x^2 = 0$;
զ) $3 + x^2 = 0$;
է) $8 - 2x^2 = 0$;
ը) $3 - 12x^2 = 0$;
թ) $7 = 28x^2$;
ժ) $\frac{1}{4} + x^2 = 0$;
ի) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$:

603. ա) $x^2 - 3 = 0$; բ) $x^2 - 5 = 0$; գ) $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$;
դ) $\frac{1}{5}x^2 - 10 = 0$; ե) $4x^2 - 3 = 0$; զ) $5x^2 + 2 = 0$;
է) $x^2 = 2304$; ը) $x^2 - 31{,}36 = 0$; թ) $0{,}001x^2 = 40$:

604. ա) $4x^2 + 6x = 7x^2 - 12x$; բ) $1{,}2x - 0{,}5x^2 = 4x^2 - 0{,}8x$;
գ) $0{,}76x^2 + 1{,}4x = 0$; դ) $0{,}6x^2 + \sqrt{3} \cdot x = 0$;
ե) $0{,}07x^2 - 50 = 2{,}1x - 50$; զ) $9x^2 - 10x = 7x^2 - 15x$;
է) $-0{,}5x^2 + \sqrt{5} \cdot x = 0$; ը) $\frac{2}{3}x^2 = 5x$:

605. Գրեք քառակուսային հավասարման ընդհանուր տեսքը, եթե՝
ա) նրա արմատներից մեկը հավասար է զրոյի, իսկ մյուսը հավասար չէ զրոյի:
բ) նրա երկու արմատներն էլ զրո են:
գ) նրա արմատները բացարձակ արժեքներով հավասար են, բայց ունեն հակադիր նշաններ:

606. Գրեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներն են՝
ա) 0 և 0; բ) 0 և 4; գ) -1 և 7;
դ) 0,5 և 8; ե) -5 և $+5$; զ) $-\sqrt{7}$ և $\sqrt{7}$;
է) 5 և 3; ը) -1 և 9:

607. Լուծեք հավասարումը՝
ա) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2$;
բ) $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) + 26 = 0$;
գ) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(x + 2) = 24$;
դ) $(2x - 5)(3x - 4) - (3x + 4)(x - 2) - 10x - 28 = 0$;
ե) $(x + 2)(x - 3)(x - 1) = x\,(x + 1)(x + 6) + 6$:

608. Լուծեք հավասարումը.

ա) $(x-1)^2-1=0$;

բ) $(x+2)^2-4=0$;

գ) $\dfrac{4x^2-1}{3}-\dfrac{3x^2+8}{5}=1$;

դ) $\dfrac{5x^2-48}{8}-\dfrac{33-2x^2}{6}=3\dfrac{5}{6}$;

ե) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{16}$;

զ) $(3x+1,5)(3x-1,5)=54$;

է) $\dfrac{3x^2-4x}{2}=\dfrac{5x^2-x}{3}$;

ը) $\dfrac{2x-3x^2}{5}-\dfrac{7x^2-x}{4}=\dfrac{x^2}{2}$:

609. ա) m-ի ի՞նչ թվային արժեքների դեպքում գոյություն ունեն $x^2+m=0$ հավասարման արմատներ:

բ) գրեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներից մեկը զրո է:

գ) k-ի ի՞նչ թվային արժեքի դեպքում $10x^2+4x-k=0$ հավասարումն ունի 0 արմատ:

610. ա) բնական թվի քառակուսին հավասար է այդ թվի եռապատիկին: Գտեք այդ թիվը:

բ) բնական թվի քառակուսին երկու անգամ փոքր է այդ թվից: Գտեք այդ թիվը:

611. Լուծեք հավասարումն x-ի նկատմամբ համարելով m-ը և n-ը տված թվեր՝

ա) $m^2x^2-n^2=0$;

բ) $m^2x^2-4=0$;

գ) $mx^2-\dfrac{1}{m}=0$;

դ) $nx^2-\dfrac{m^2}{n}=0$:

6.4. Ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման լուծումը

Այս կետում մենք դիտարկում ենք ընդհանուր տեսքով գրված

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0) \qquad (1)$$

քառակուսային հավասարման լուծումը:

Թեորեմ 1: ***Եթե (1) քառակուսային հավասարման պարբերիչը դրական է, ապա այն ունի երկու իրարից պարբեր արմատներ՝***

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)$$

և այլ արմատներ չունի:

Ապացույց: Ինչպես ցույց է տրված 6.1 կետում, եթե D > 0, ապա

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

որտեղ x_1-ը և x_2-ը որոշվում են (2) հավասարություններով:

Ուստի (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (3)$$

տեսքով:

Ակնհայտ է, որ (3) հավասարումն ունի x_1 և x_2 արմատները և այլ արմատներ չունի, որովհետև եթե նրա ձախ մասում x-ի փոխարեն տեղադրենք x_1-ից և x_2-ից տարբեր ցանկացած թիվ, ապա կստացվի զրոյից տարբեր թիվ: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2. ***Եթե (1) քառակուսային հավասարման պարբերիչը հավասար է զրոյի, ապա այն ունի***

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

միակ արմատը և այլ արմատներ չունի:

Ապացույց: Ինչպես ցույց է տրված 6.1 կետում, եթե D = 0, ապա ճիշտ է

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_0)^2$$

հավասարությունը, որտեղ

$$x_0 = -\frac{b}{2a}:$$

Ուստի (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$a(x - x_0)^2 = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (4)$$

տեսքով:

Ակնհայտ է, որ x_0-ն (4) հավասարման արմատ է, և հավասարումն այլ արմատներ չունի, որովհետև նրա ձախ մասում x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0-ից տարբեր ցանկացած թիվ՝ կստանանք զրոյից տարբեր թիվ: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3. ***Եթե (1) քառակուսային հավասարման պարբերիչը բացասական է, ապա այն արմատներ չունի:***

Ապացույց: Ինչպես ցույց է տրված 6.1 կետում, եթե D < 0, ապա x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ եթե } a > 0,$$

կամ

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ եթե } a < 0:$$

Դա նշանակում է, որ եթե D < 0, ապա գոյություն չունի իրական թիվ, որը x-ի փոխարեն տեղադրելով (1) հավասարման ձախ մասում` ստացվի զրո, այսինքն D < 0 դեպքում (1) հավասարումն իրական արմատներ չունի: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, ***(1) քառակուսային հավասարումը`***

1) ունի երկու իրարից տարբեր արմատներ, եթե նրա տարբերիչը մեծ է զրոյից,

2) ունի միակ արմատ, եթե նրա տարբերիչը հավասար է զրոյի,

3) արմատներ չունի, եթե նրա տարբերիչը փոքր է զրոյից:

Դիտողություն 1. Եթե (1) հավասարման տարբերիչը դրական է, ապա այդ հավասարման արմատների (2) բանաձևերը հաճախ գրում են մի բանաձևի տեսքով`

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}: \qquad (5)$$

Դիտողություն 2. Եթե D = 0, ապա (5) բանաձևը նորից մնում է ստույգ: Այդ դեպքում այն տալիս է

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

միակ արմատը, կամ ինչպես ասում են, երկու համընկնող արմատներ`

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}:$$

Հետագայում քառակուսային հավասարումներ լուծելիս մենք չենք կրկնի վերը բերված դատողությունները, այլ միանգամից կօգտվենք (5) բանաձևից:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$3x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad (6)$$

հավասարումը:

Հաշվենք (6) հավասարման տարբերիչը`

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 28 > 0$$

Հետևաբար, (6) հավասարումն ունի երկու արմատներ, որոնք հաշվվում են

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

բանաձևով, այսինքն (6) հավասարումն ունի երկու արմատներ`

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \text{ և } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}:$$

Օրինակ 2. Լուծենք

$$25x^2 - 30x + 9 = 0 \qquad (7)$$

հավասարումը:

Հաշվենք (7) հավասարման տարբերիչը՝

$$D = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0$$

Հետևաբար (7) հավասարումն ունի միակ արմատ, որը կարելի է հաշվել

$$x_0 = x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{30 \pm 0}{2 \cdot 25} = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

բանաձևով, այսինքն (7) հավասարումն ունի 0,6 միակ արմատը, կամ ինչպես ասում են, երկու համընկնող արմատներ՝

$$x_1 = x_2 = 0{,}6:$$

Օրինակ 3. Լուծենք

$$2x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad (8)$$

հավասարումը:

Հաշվենք (8) հավասարման դիսկրիմինանտը (տարբերիչը)

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0:$$

Հետևաբար (8) հավասարումն արմատներ չունի:

Դիտողություն: $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարման արմատներն անվանում են նաև $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի արմատներ:***

612. Ի՞նչն են անվանում քառակուսային հավասարման տարբերիչ:

613. Քանի՞ արմատ ունի քառակուսային հավասարումը, եթե նրա տարբերիչը՝
ա) դրական է, բ) հավասար է զրոյի, գ) բացասական է:

614. Ի՞նչ բանաձևով կարելի է գտնել քառակուսի հավասարման արմատները, եթե նրա տարբերիչը ոչ բացասական է:

615. Գրեք հավասարման մեջ x-ի և x^2-ու գործակիցները, ազատ անդամը, հաշվեք տարբերիչը և նշեք հավասարման արմատների քանակը.
ա) $x^2 - 10x + 21 = 0$; բ) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
գ) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; դ) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$;
ե) $4x - x^2 - 1 = 0$; զ) $3 + 2x^2 - 7x = 0$;

է) $\frac{x^2}{3} - 7x = 1$;

ը) $\frac{x^2}{2} - 3,5 = 2x$;

թ) $x^2 = \frac{x}{2} - 1$;

ժ) $4 - 4x + x^2 = 0$:

616. Լուծեք հավասարումը.

ա) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

բ) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

գ) $x^2 - x - 2 = 0$;

դ) $x^2 + x - 6 = 0$;

ե) $x^2 + 4x + 15 = 0$;

զ) $x^2 + 4x + 4 = 0$;

է) $5x^2 + 8x - 9 = 0$;

ը) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;

թ) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;

ժ) $5x^2 - 6x + 1 = 0$:

617. Լուծեք հավասարումը՝ նախապես հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով այնպիսի թվով, որ նրա գործակիցները դառնան ամբողջ թվեր.

ա) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$;

բ) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$;

գ) $x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$;

դ) $x^2 + \frac{x}{7} - 50 = 0$;

ե) $x^2 - 2,5x + 1 = 0$;

զ) $x^2 - 5\frac{1}{5}x + 1 = 0$:

Լուծեք հավասարումը (618-621).

618. ա) $2x^2 = 5 + 3x$;

բ) $-x^2 + 14x - 48 = 0$;

գ) $-7x^2 + 2x = -329$;

դ) $x^2 + x - 5 = 0$;

ե) $2x^2 - 17x - 9 = 0$;

զ) $7x^2 + 13x - 3 = 0$;

է) $9x^2 - 20 = 24x$;

ը) $4x^2 - 4x = 15$:

619. ա) $(x + 8)(x - 9) = -52$;

բ) $(x - 1)(2x + 3) = 7$;

գ) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(2x - 10)$;

դ) $(x - 1)(x - 2) = (3x + 1)(x - 2)$;

ե) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x + 5}{6}$;

զ) $\frac{5(x^2 - 1)}{4} = \frac{x}{6} - 2$;

է) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x - 10}{4}$;

ը) $\frac{x - 3}{4} + \frac{2x + 3}{6} = \frac{x^2 - 11}{12}$:

620. ա) $(x + 3)(x - 2) + (x + 2)^2 = 3x + 10$;

բ) $(x - 5)^2 + (3 - x)^2 - 4(x + 5)(3 - x) - 48 = (x + 1)^2$;

գ) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) - (x^2 + 3)(x - 5) + 2x = 33$;

դ) $8x^2 + 11 + \frac{x}{7} = \frac{1-5x}{7}$;

ե) $1,2x^2 - 0,8x - 3,1 = 0$;

զ) $0,3x^2 + 2,3x - 3,4 = 0$:

621. ա) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
բ) $x^2 - 10x + 9 = 0$;
գ) $x^2 - 3x = 1,75$;
դ) $x^2 + x = 2$;
ե) $x^2 - 6x + 6 = 0$;
զ) $x^2 + 8x + 2 = 0$;
է) $x^2 - 3x + 1 = 0$;
ը) $x^2 - 5x - 1 = 0$;
թ) $x^2 + 8x + 15 = 0$;
ժ) $x^2 + 5x - 6 = 0$:

622. Լուծեք հավասարումը.
ա) $5x^2 - 6x + 1,75 = 0$;
բ) $\sqrt{2}x^2 - 10x + 8\sqrt{2} = 0$;
գ) $11x^2 - 10x - 9 = 0$;
դ) $\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{2}x + 8\sqrt{3} = 0$;
ե) $\frac{5}{4}x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$;
զ) $2x^2 - 3,1x + 0,42 = 0$;
է) $3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2 = 0$;
ը) $\frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{3}{5}x = 0$;
թ) $46x - 21 + 7x^2 = 0$;
ժ) $2x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} = 0$;
ի) $\sqrt{3}y^2 - 8\sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0$;
լ) $16a^2 - 8\sqrt{2}a + 1 = 0$;
խ) $m^2 + 2\sqrt{2}m + \sqrt{3} = 0$;
ծ) $(x-3)^2 = 1 - \pi$;
կ) $(2x+3)^2 - (x-2)^2 = 5$;
հ) $(5-3x)(3x+5) - 2x(x-3) = 25$:

Համարժեք են արդյո՞ք հավասարումները (623-624).

623. ա) $(x+4)(x-3) = 0$ և $x^2 + x - 12 = 0$;
բ) $(x+3)(x-1) = 0$ և $x^2 - 2x - 3 = 0$;
գ) $(x-2)(x+1) = 0$ և $x + \frac{6}{2-x} = 1$;
դ) $(x-1)(x-2) = 0$ և $\frac{3}{2-x} - x = 2$;
ե) $x + 4 = 2x$ և $x = 4$;
զ) $2x + 5 = 0$ և $x + 3 = 0$;
է) $2x = 5$ և $x = -2,5$;
ը) $x^2 + x = 0$ և $x^2 = 0$:

624. ա) $2(x+1) = 3(x-2)$ և $2(x+1) + 1 = 3(x-2) + 1$;
բ) $2(x+1) + x + 2 = 3(x-2) + x + 2$ և $2(x+1 = 3(x-2)$;
գ) $2(x+1) + \frac{1}{x} = 3(x-2) + \frac{1}{x}$ և $2(x+1) = 3(x-2)$;
դ) $x = 2$ և $x + \frac{2-x}{x+1} = 2 + \frac{2-x}{x+1}$;

ե) $x + 1 = 2 - x$ և $2(x + 1) = 2(2 - x)$;
զ) $x + 1 = 2 - x$ և $x(x + 1) = x(2 - x)$;
է) $x + 1 = 2 - x$ և $(x + 1)(x - 1) = (2 - x)(x - 1)$;
ը) $x + 1 = 2 - x$ և $(x + 1)(x^2 + 2) = (2 - x)(x^2 + 2)$;
թ) $x + 1 = 2 - x$ և $(x + 1)(2x - 1) = (2 - x)(2x - 1)$:

625. Ապացուցեք, որ $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարման արմատները $D \geqslant 0$ դեպքում կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ որտեղ } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac:$$

Այդ բանաձևով լուծեք հավասարումը՝
ա) $x^2 - 8x + 7 = 0$;
բ) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
գ) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
դ) $3x^2 - 10x + 8 = 0$;
ե) $8x^2 - 8x + 5 = 0$;
զ) $24x^2 - 10x + 1 = 0$;
է) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;
ը) $5x^2 + 8x + 3 = 0$:

626. m-ի ինչպիսի՞ թվային արժեքի դեպքում հավասարումն ունի երկու համընկնող արմատներ՝
ա) $x^2 + mx + 3 = 0$;
բ) $2x^2 - mx - 2 = 0$;
գ) $3x^2 - 2x + m = 0$;
դ) $x^2 = mx + m$:

627. Լուծեք հավասարումը՝
ա) $ax^2 - 2x + 1 = 0$, եթե $a \leqslant 1$ և $a \neq 0$;
բ) $x^2 - 4x + 4a = 0$, եթե $a \leqslant 1$:

628. Ինչպիսի՞ a թվի համար $x^2 + 2x + a = 0$ հավասարումը
ա) ունի երկու տարբեր արմատներ,
բ) ունի միակ արմատ,
գ) արմատներ չունի:

629. Յուրաքանչյուր a իրական թվի համար լուծեք հավասարումը՝
ա) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$;
բ) $ax^2 - 2x + 1 = 0$;
գ) $x^2 - 4x + 4a = 0$;
դ) $x^2 + 2x + a = 0$:

6.5 Բերված տեսքի քառակուսային հավասարում

Քառակուսային հավասարումը, որում x^2-ու գործակիցը 1 է, անվանում են ***բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:***

$$x^2 - 2x + 7 = 0,\ \ x^2 = 0,\ \ x^2 - 5 = 0,\ \ x^2 - 3x = 0$$

հավասարումները բերված տեսքի քառակուսային հավասարումների օրինակներ են: Բերված տեսքի քառակուսային հավասարումը ընդհանուր տեսքով սովորաբար գրառում են այսպես՝

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (1)$$

որտեղ p-ն և q-ն տված թվեր են: p-ն կոչվում է x-ի գործակից, իսկ q-ն՝ ազատ անդամ:

Այսպիսով, (1) հավասարումը կարելի է դիտարկել որպես ընդհանուր տեսքի

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

քառակուսային հավասարման մասնավոր դեպք, որտեղ $a = 1$, $b = p$, $c = q$:

(1) հավասարման տարբերիչը հավասար է՝

$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac = p^2 - 4q:$$

Դիցուք $\mathrm{D} > 0$. այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, (1) հավասարումն ունի

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (4)$$

բանաձևով հաշվվող երկու արմատներ:

Դիցուք այժմ $\mathrm{D} = 0$. այդ դեպքում (1) հավասարումն ունի միակ արմատ կամ, ինչպես ասում են, երկու համընկնող արմատներ՝

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}: \qquad (5)$$

Իսկ եթե $\mathrm{D} < 0$, ապա, ինչպես գիտենք, (1) հավասարումն իրական արմատներ չունի:

Սովորաբար (1) բերված տեսքի հավասարման համար D տարբերիչի փոխարեն դիտարկվում է $\frac{\mathrm{D}}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ արտահայտությունը, որն ունի նույն նշանը, ինչը որ D-ն: Ընդ որում բերված տեսքի քառակուսային հավասարման արմատների (4) բանաձևը գրում են այսպես՝

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{D}}{4}}: \qquad (6)$$

Մենք ցույց տվեցինք, որ՝

1) եթե $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, ապա (1) հավասարումն ունի (6) բանաձևով հաշվվող երկու արմատներ,

2) եթե $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, ապա (1) հավասարումն ունի երկու համընկնող արմատներ, որոնք հաշվվում են նույն (6) բանաձևով կամ որ նույնն է՝ (5) բանաձևով,

3) եթե $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, ապա (1) հավասարումն արմատներ չունի:

Օրինակ: Լուծենք $x^2 - 8x + 7 = 0$ հավասարումը:

Լուծում: Հաշվենք $\frac{D}{4}$-ը՝

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-4)^2 - 7 = 9 > 0$$

Հավասարումն ունի երկու արմատներ՝

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3; \;\; x_1 = 1, x_2 = 7:$$

Պատասխան՝ 1 և 7:

630. Ո՞ր հավասարումն են անվանում բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:

631. Ո՞ր բանաձևով կարելի է գտնել բերված տեսքի քառակուսային հավասարման արմատները, եթե նրա տարբերիչը ոչ բացասական է:

Լուծեք հավասարումը (632-635).

632. ա) $x^2 - 6x + 8 = 0$; բ) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
գ) $x^2 + 6x + 8 = 0$; դ) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
ե) $x^2 + 20x + 51 = 0$; զ) $x^2 - 22x - 23 = 0$;
է) $x^2 - 20x + 69 = 0$; ը) $x^2 + 22x + 21 = 0$:

633. ա) $x^2 - 4x + 4 = 0$; բ) $x^2 - 8x + 20 = 0$;
գ) $x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$; դ) $x^2 + 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$;
ե) $x^2 + 16x + 48 = 0$; զ) $x^2 - 9x - 22 = 0$;
է) $x^2 + 8x + 71 = 0$ ը) $x^2 + 12x + 40 = 0$:

634. ա) $x^2 - x - 2 = 2$; բ) $x^2 - 5x - 24 = 0$;
գ) $x^2 - 3x + 2 = 0$; դ) $x^2 - 13x + 42 = 0$;
ե) $x^2 + x - 2 = 0$; զ) $x^2 - x - 6 = 0$;
է) $x^2 + 14x + 48 = 0$; ը) $x^2 + 17x + 66 = 0$:

635. ա) $3x^2 - 4x - 4 = 0$; բ) $2x^2 - 8x - 20 = 0$;
գ) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; դ) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;
ե) $16x^2 + 21x - 22 = 0$; զ) $18x^2 - x - 1 = 0$;
է) $7x^2 - x - 1 = 0$; ը) $14x^2 + 11x - 3 = 0$:

6.6 Վիետի թեորեմը

Դիցուք տված է

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

բերված տեսքի քառակուսային հավասարումը:

Վիետի թեորեմը: ***Եթե (1) բերված տեսքի քառակուսային հավասարման տարբերիչը (դիսկրիմինանտը) ոչ բացասական է, ապա այդ հավասարման արմատների գումարը հավասար է x-ի գործակցին վերցված հակադիր նշանով, իսկ արմատների արտադրյալը հավասար է ազատ անդամին:***


Ֆ.Վիետ (1540-1603)

Այլ կերպ ասած, եթե x_1-ը և x_2-ը (1) հավասարման արմատներն են, ապա

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q: \qquad (2)$$

(2) բանաձևերը անվանում են Վիետի բանաձևեր, ի պատիվ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ֆ.Վիետի (1540-1603):

Դիտողություն 1. Ընդգծենք, որ այստեղ D = 0 դեպքում ենթադրվում է, որ (1) հավասարումն ունի ***երկու համընկնող արմատներ:***

Ապացույց: Ոչ բացասական տարբերիչի դեպքում (1) հավասարման արմատները հաշվվում են

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (3)$$

բանաձևերով:

Գումարելով (3) հավասարությունները՝ կստանանք

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -p:$$

Բազմապատկելով (3) հավասարությունները և կիրառելով քառակուսիների տարբերության բանաձևը՝ կստանանք

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q:$$

Վիետի թեորեմն ապացուցված է:

Ճիշտ է նաև ***Վիետի թեորեմի հակադարձ թեորեմը***`

Եթե որևէ x_1, x_2, p, q թվերի համար ճիշտ են (2) բանաձևերը, ապա x_1-ը և x_2-ը (1) հավասարման արմատներն են:

Իրոք, օգտվելով (2) բանաձևերից, կստանանք`

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q:$$

Այստեղից պարզ է, որ եթե $x^2 + px + q$ եռանդամի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք x_1 կամ x_2, նրա արժեքը հավասար կլինի զրոյի, հետևաբար x_1-ը և x_2-ը

$$x^2 + px + q = 0$$

հավասարման արմատներն են:

Դիտողություն 2: Վիետի թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման համար`

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0), \qquad (4)$$

օգտագործելով նրա համարժեք լինելը

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

հավասարմանը:

Եթե ընդհանուր տեսքի (4) քառակուսային հավասարումն ունի ոչ բացասական տարբերիչ և եթե x_1-ը և x_2-ը (4) հավասարման արմատներն են, ապա`

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}:$$

Վիետի թեորեմը և նրա հակադարձը հաճախ կիրառվում են տարբեր խնդիրներ լուծելիս:

Օրինակ 1. Գրենք 1 և –3 արմատներ ունեցող բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:

Այլ կերպ ասած, գտնենք p և q թվերն այնպես, որ $x^2 + px + q = 0$ հավասարման արմատները լինեն 1 և –3 թվերը:

Ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$-p = x_1 + x_2 = -2$$
$$q = x_1\, x_2 = -3$$

Հետևաբար, որոնելի հավասարումն ունի

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

տեսքը:

Օրինակ 2. Առանց լուծելու

$$x^2 - 364x + 497 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը, որոշենք նրա արմատների նշանները:

Այս հավասարման տարբերիչը դրական է, քանի որ

$$\frac{D}{4} = 182^2 - 497 > 0:$$

Ուրեմն հավասարումն ունի երկու արմատներ՝ x_1 և x_2:

Ըստ Վիետի թեորեմի՝ $x_1 \cdot x_2 = 497$, այսինքն արմատների արտադրյալը դրական է: Հետևաբար արմատներն ունեն նույն նշանները՝ կամ $x_1 > 0$ և $x_2 > 0$, կամ $x_1 < 0$ և $x_2 < 0$:

Բայց, ըստ Վիետի թեորեմի, $x_1 + x_2 = 364$, այսինքն արմատների գումարը նույնպես դրական է: Հետևաբար (5) հավասարումն ունի երկու դրական արմատներ:

Օրինակ 3.* Հաշվենք $x_1^2 + x_2^2$ արտահայտության արժեքը, որտեղ

x_1-ը և x_2-ը

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad (6)$$

հավասարման արմատներն են:

Հաշվենք դիսկրիմինանտը՝ $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$: Ուստի (6) հավասարումն, իրոք, ունի երկու արմատներ, սակայն խնդիրը լուծելու համար դրանց գտնելու անհրաժեշտությունը չկա: $x_1^2 + x_2^2$ արտահայտությունը ձևափոխեք հետևյալ կերպ՝

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2:$$

Քանի որ $x_1 + x_2 = -(-3) = 1$, $x_1x_2 = 1$ ապա

$$x_1^2 + x_2^2 = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7:$$

636. Ձևակերպեք՝
ա) Վիետի թեորեմը,
բ) Վիետի թեորեմի հակադարձ թեորեմը:

637. Գրեք Վիետի բանաձևերը:

638. Ապացուցեք Վիետի թեորեմը՝
ա) բերված տեսքի քառակուսային հավասարման համար,
բ) ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման համար:

639. Պարզեք՝ հավասարումն արմատներ ունի՞ (եթե ունի, գտեք նրանց գումարը և արտադրյալը).
ա) $x^2 - x + 1 = 0$;
բ) $x^2 + x + 3 = 0$;
գ) $x^2 + 3x - 2 = 0$;
դ) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
ե) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
զ) $x^2 + 4x + 4 = 0$:

640. Կազմեք բերված տեսքի քառակուսային հավասարում, եթե հայտնի են նրա արմատների L գումարը և K արտադրյալը.
ա) $L = 3, K = -28$;
բ) $L = -3, K = -18$;
գ) $L = -3{,}5, K = 2{,}5$;
դ) $L = \frac{5}{6}, K = \frac{1}{6}$;
ե) $L = 0, K = -9$;
զ) $L = 4, K = 4$:

641. Երկու եղանակով կազմեք բերված տեսքի քառակուսային հավասարում, եթե հայտնի են նրա արմատները.
ա) 1 և 5;
բ) -2 և 3;
գ) 4 և 6;
դ) -3 և -6;
ե) 0,5 և 4;
զ) 1,2 և -5;
է) 1 և -1;
ը) 5 և 5:

Օրինակ՝ $x_1 = 2, x_2 = 3$:

1-ին եղանակ՝ $1 \cdot (x - 2)(x - 3) = ... = x^2 - 5x + 6$:

2-րդ եղանակ՝ $p = -(2 + 3) = -5, q = 2 \cdot 3 = 6$,
այսինքն որոնելի հավասարումն է՝
$x^2 - 5x + 6 = 0$:

642. Կազմեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներն են՝
ա) 2 և $\sqrt{3}$;
բ) $\sqrt{3}$ և 5;
գ) $\sqrt{7}$ և $-\sqrt{7}$;
դ) 0 և 5;
ե) $1 - \sqrt{2}$ և $1 + \sqrt{2}$;
զ) $2 - \sqrt{5}$ և $2 + \sqrt{5}$:

643. Առանց լուծելու հավասարումը, որոշեք նրա արմատների նշանները: Այնուհետև, հաշվելով արմատները, ստուգեք լուծումը.

ա) $x^2 - 7x + 12 = 0$; բ) $x^2 + 7x + 12 = 0$;
գ) $x^2 + 5x - 14 = 0$; դ) $x^2 - 5x - 14 = 0$;
ե) $x^2 + 1,27x - 1,46 = 0$; զ) $x^2 - \frac{3}{5}x - 0,5 = 0$;
է) $x^2 - 56x + 768 = 0$; ը) $x^2 - 20x - 684 = 0$;
թ) $x^2 = -377x - 31242$; ժ) $x^2 + 272x = 49104$:

644. Նշեք քառակուսային հավասարման արմատների գումարը և արտադրյալը (եթե արմատներ գոյություն ունեն).

ա) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; բ) $3x^2 + x + 4 = 0$;
գ) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$; դ) $1,4x^2 - 3x + \frac{5}{7} = 0$;
ե) $0,1x^2 - 8x + 4,2 = 0$; զ) $3x^2 + 1,1x - 0,4 = 0$:

645. Կազմեք 3-ի հավասար երկու համընկնող արմատներ ունեցող բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:

646. Հավասարման արմատներից մեկը հավասար է 2-ի: Առանց լուծելու հավասարումը, գտեք նրա երկրորդ արմատը.

ա) $x^2 + 5x = 14$; բ) $x^2 - 13x = -22$;
գ) $x^2 - 2,5x + 1 = 0$; դ) $x^2 - 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$:

647. Ապացուցեք, որ

ա) $5x^2 = 8x + 284$ հավասարումը չի կարող ունենալ նույն նշանի արմատներ:

բ) $17x^2 = 7x - 354$ հավասարումը չի կարող ունենալ տարբեր նշանի արմատներ:

648. Հայտնի է, որ x_1-ը հավասարման արմատ է: Գտեք հավասարման երկրորդ արմատը և a թիվը:

ա) $2x^2 + 16x + a = 0, x_1 = 3$; բ) $3x^2 + ax - 72 = 0, x_1 = 8$:

649. Կազմեք քառակուսային հավասարում, որի արմատները՝

ա) համապատասխանաբար հավասար են $3x^2 + 2x - 15 = 0$ հավասարման արմատների գումարին և արտադրյալին:

բ) Մեկով մեծ են $3x^2 - 11x + 2 = 0$ հավասարման արմատներից:

գ) Երկու անգամ փոքր են $2x^2 - 13x + 3 = 0$ հավասարման արմատներից:

650. ա) x_1-ը և x_2-ը $x_2 - 2000x + 1999 = 0$ հավասարման արմատներն են: Կազմեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներն են $-x_1$-ը և $-x_2$-ը:
բ) բանավոր լուծեք քառակուսային հավասարումները՝
$x^2 + 2000x - 2001 = 0$, $x^2 - 2000x - 2001 = 0$
$x^2 - 2001x + 2000 = 0$, $x^2 + 2001x + 2000 = 0$:

651. $x^2 + 3x - 1 = 0$ հավասարումն ունի երկու արմատներ՝ x_1 և x_2: Հաշվեք՝
ա) $x_1 + x_2$; բ) $x_1 \cdot x_2$; գ) $(x_1 + x_2)^2$;
դ) $x_1^2 + x_2^2$; ե) $x_1^3 + x_2^3$; զ) $(x_1 - x_2)^2$:

6.7 Քառակուսային հավասարումների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

Խնդիր 1. Երկու հաջորդական բնական թվերի քառակուսիների գումարը 54-ով մեծ է նրանց արտադրյալից: Գտեք այդ թվերը:

Լուծում: Որոնելի բնական թվերից փոքրը նշանակենք x-ով, այդ դեպքում նրան հաջորդող բնական թիվը կլինի $x + 1$-ը: Ըստ խնդրի պայմանի՝

$$x^2 + (x + 1)^2 - x(x + 1) = 57: \qquad (1)$$

Այսպիսով, որոնելի x թիվը պետք է հանդիսանա (1) հավասարման արմատ: (1) հավասարման բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ կողմ և կատարելով ձևափոխություններ՝ ստանում ենք

$$x^2 + x - 56 = 0 \qquad (2)$$

հավասարումը, որը համարժեք է (1) հավասարմանը: Քանի որ (2) հավասարման տարբերիչը՝ $D = 1 - 4 \cdot (-56) = 225 > 0$, ապա (2) քառակուսային հավասարման արմատները հաշվվում են

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}$$

բանաձևով: Հետևաբար (2) հավասարումը և նրան համարժեք (1) հավասարումն ունեն

$$x_1 = 7, x_2 = -8 \qquad (3)$$

արմատները: Քանի որ x-ը բնական թիվ է, ապա այդ երկու արմատներից խնդրի պայմանին բավարարում է միայն $x_1 = 7$-ը: Այսպիսով, $x = 7$, $x + 1 = 8$:

Պատասխան՝ 7 և 8:

Խնդիր 2:* Ապրանքը սկզբում արժեր 2500 դրամ: Հաջորդաբար երկու անգամ նրա գինը իջեցնելուց հետո ապրանքի գինը դարձավ 1800 դրամ: Ընդ որում երկրորդ անգամ իջեցման տոկոսը երկու անգամ մեծ էր, քան առաջին անգամ: Քանի՞ տոկոսով էր իջեցված ապրանքի գինը յուրաքանչյուր անգամ:

Լուծում: Դիցուք առաջին անգամ ապրանքի գինը իջեցվել է x%-ով: Դա նշանակում է, որ առաջին էժանացումից (իջեցումից) հետո ապրանքի գինը դարձավ

$$2500 - 2500 \cdot \frac{x}{100} = 2500\left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

դրամ:

Երկրորդ անգամ ապրանքի գինը իջեցվել է $2x$%-ով: Դա նշանակում է, որ երկրորդ իջեցումից հետո ապրանքի գինը դարձավ

$$2500\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{100}\right)$$

դրամ: Ըստ խնդրի պայմանի, երկու իջեցումներից հետո ապրանքի գինը դարձել է 1800 դրամ: Հետևաբար, որոնելի x թիվը պետք է հանդիսանա

$$2500\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{100}\right) = 1800 \qquad (4)$$

հավասարման արմատ:

Տեղափոխելով հավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ (նախապես (4)-ի երկու մասը բաժանելով 100-ի)՝ ձևափոխություններից հետո ստանում ենք

$$\frac{x^2}{200} - \frac{3x}{4} + 7 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը: Բազմապատկելով այդ հավասարումը 200-ով՝ կստանանք

$$x^2 - 150x + 1400 = 0 \qquad (6)$$

հավասարումը: Լուծելով (6) հավասարումը՝ կգտնենք նրա $x_1 = 10$ և $x_2 = 140$ արմատները: Քանի որ (5) և (4), (6) և (5) հավասարումները համարժեք են, ապա (4) հավասարումն ունի նույն $x_1 = 10$ և $x_2 = 140$ արմատները: Քանի որ ապրանքի գինը հնարավոր չէ իջեցնել 140%-ով, ապա խնդրի պայմանին բավարարում է միայն $x_1 = 10$ թիվը: Այսպիսով, $x = 10$, $2x = 20$:

Պատասխան՝ գինը իջեցրին 10%-ով, այնուհետև 20%-ով:

652. 10 թիվը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ այդ գումարելիների արտադրյալը հավասար լինի 21: Գտեք գումարելիները:

653. 14 թիվը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ այդ գումարելիների արտադրյալը հավասար լինի 36, 75: Գտեք գումարելիները:

654. ա) Երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը 110 է: Գտեք այդ թվերը:
բ) Երկու իրար հաջորդող բնական թվերի արտադրյալը 210 է: Գտեք այդ թվերը:
գ) Բնական թվերից մեկը մեծ է մյուսից 7-ով, իսկ նրանց արտադրյալը հավասար է 44: Գտեք այդ թվերը:
դ) Բնական թվերից մեկը փոքր է մյուսից 12-ով, իսկ նրանց արտադրյալը 448 է: Գտեք այդ թվերը:

655. ա) Գտեք երկու թվեր, որոնց գումարը 20 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ 218.
բ) Գտեք երկու թվեր, որոնց գումարը -2 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ 34:

656. ա) Երկնիշ թվի[1] թվանշաններից մեկը 2-ով մեծ է մյուսից, իսկ այդ թվի և նրանից թվանշանների տեղափոխությամբ ստացված թվի քառակուսիների գումարը հավասար է 4034: Գտեք այդ թիվը:
բ) Գտեք երկնիշ թիվը, եթե նրա միավորների թվանշանը 4-ով փոքր է տասնավորների թվանշանից, իսկ այդ թվի և նրա թվանշանների գումարի արտադրյալը հավասար է 306:

657. ա) Եթե քառակուսու պարագիծը փոքրացնենք 40-ով, ապա նրա մակերեսը կփոքրանա $\frac{17}{9}$ անգամ: Գտեք սկզբնական քառակուսու պարագիծը:
բ) Ուղղանկյան կողմերից մեկը 11 մ-ով մեծ է մյուսից: Այդ ուղղանկյունը ձևափոխված է նրան հավասարամեծ (այսինքն նույն մակերեսն ունեցող) ուղղանկյան, որի մեծ կողմը դարձել է 10 մ, իսկ փոքր կողմը մեծացել է 2 մ-ով: Որոշեք սկզբնական ուղղանկյան կողմերը և մակերեսը:

---

(1) Երկնիշ թիվն ընդունված է նշանակել $\overline{ab} = 10a + b$: Նման կերպ, եռանիշ թիվը՝ $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, քառանիշ թիվը՝ $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ և այլն:

գ) Հնարավո՞ր է արդյոք, որ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը հավասար լինեն երեք իրար հաջորդող բնական թվերի, երեք իրար հաջորդող զույգ թվերի, երեք իրար հաջորդող կենտ թվերի:
դ) Ո՞ր ուռուցիկ բազմանկյան կողմերի թիվը հավասար է նրա անկյունագծերի թվին:

658. ա) Ավարտական դասարանի աշակերտներից յուրաքանչյուրը որոշեց փոխանակել իր լուսանկարը մյուսների հետ: Քանի՞ աշակերտ կար դասարանում, եթե պահանջվեց 930 լուսանկար:
բ) Մի քանի մարդ հանդիպելիս միմյանց ողջունեցին ձեռք սեղմելով: Քանի՞ մարդ էին հանդիպել, եթե ձեռքսեղմումների թիվը 21 է:

659. ա) Ուղղանկյան բարձրությունը նրա հիմքի 75%-ն է: Գտեք այդ ուղղանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 48 մ^2 է:
բ) Քառակուսու ձև ունեցող թիթեղից կտրեցին 3 սմ լայնությամբ շերտ, որից հետո թիթեղի մնացած մասի մակերեսը դարձավ 10 սմ^2: Որոշեք թիթեղի սկզբնական չափերը:

660. Առևտրի կենտրոնը ապրանքը գնում է 800 դրամով և վաճառում՝ բարձրացնելով գինը որոշակի տոկոսով: Խանութը այդ ապրանքը գնում է առևտրի կենտրոնում և վաճառում՝ բարձրացնելով գինը 1,5 անգամ ավելի տոկոսով, քան բարձրացրել էր առևտրի կենտրոնը: Արդյունքում խանութում ապրանքի գինը դարձել է 1248 դրամ: Քանի՞ տոկոսով է բարձրացրել ապրանքի գինը առևտրի կենտրոնը և քանի՞ տոկոսով՝ խանութը:

661. Ապրանքի գինը 500 դրամ է: Երկու թանկացումներից հետո նրա գինը դարձավ 546 դրամ: Հայտնի է, որ երկրորդ անգամ թանկացման տոկոսը 1-ով փոքր է, քան առաջին անգամ թանկացման տոկոսը: Քանի՞ տոկոսով բարձրացվեց ապրանքի գինը յուրաքանչյուր անգամ:

662. Ծառայողի աշխատավարձը բարձրացրին երկու անգամ, ընդ որում երկրորդ անգամ բարձրացման տոկոսը երկու անգամ մեծ է քան առաջին անգամվա: Որոշեք, քանի՞ տոկոսով է բարձրացվել աշխատավարձը յուրաքանչյուր անգամ, եթե մինչև առաջին բարձրացումը աշխատավարձը 140000 դրամ էր, իսկ երկրորդ բարձրացումից հետո՝ 184800 դրամ:

663. Երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը նրանց գումարից մեծ է 109-ով: Գտեք այդ թվերը:

664. Գտեք ուղղանկյան պարագիծը, եթե նրա կողմերից մեկը մեծ է մյուսից 4 սմ-ով, իսկ մակերեսը 60 սմ^2 է:

665. Երեք հաջորդական ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարը 302 է: Գտեք այդ թվերը:

666. ***Հնագույն խնդիր:*** Իր տարիքի մասին հարցին մի տիկին պատասխանեց. «Եթե իմ տարիքն արտահայտող թիվը բարձրացվի քառակուսի կամ բազմապատկվի 53-ով և արդյունքից հանվի 696, ապա կստացվի միևնույն թիվը»: Քանի՞ տարեկան է տիկինը:

Պատմական ակնարկ

Քառակուսային հավասարումներ կարողանում էին լուծել դեռ բաբելացիները: Դա կապված էր հողատարածությունների մակերեսների հաշվման խնդիրների, ինչպես նաև աստղագիտության զարգացման հետ:

Սակայն բաբելացիների մոտ բացասական թվի գաղափարը դեռևս չկար և այդ պատճառով քառակուսային հավասարման արմատները կարող էին լինել միայն դրական թվեր:

Ալեքսանդրիացի հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի (III դար), «Թվաբանություն»-ում չկա հանրահաշվի սիստեմատիկ շարադրում, բայց այնտեղ պարունակվում են մի շարք խնդիրներ, որոնք լուծվում են հավասարումներ կազմելու օգնությամբ:

Այնտեղ կա այսպիսի խնդիր:

Գտնել երկու թվեր, որոնց գումարը 20 է, իսկ արտադրյալը՝ 96:

Եթե անհայտ թվերից մեկը նշանակենք y-ով, ապա կստանանք

$$y(20 - y) = 96$$

քառակուսային հավասարումը:

Ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարում լուծելուց խուսափելու համար Դիոֆանտը անհայտ թվերը նշանակում է $10 + x$ և $10 - x$: Նրանց գումարը հավասար է $10 + x + (10 - x) = 20$:

Կազմենք հավասարում և լուծենք այն՝

$$(10 + x)(10 - x) = 96,$$
$$100 - x^2 = 96,$$
$$x^2 = 4:$$

Դիոֆանտի ժամանակներում բացասական թվեր դեռ չգիտեին, դրա համար էլ Դիոֆանտը նշում է միայն $x = 2$ արմատը: Այդ դեպքում անհայտ թվերը հավասար են $10 + 2 = 12$ և $10 - 2 = 8$:

Քառակուսային հավասարման բերվող խնդիրներ հանդիպում են հնդիկ մաթեմատիկոսների աշխատանքներում արդեն մ.թ. V դարում: Ահա XIIդ. հնդիկ մաթեմատիկոս Բհասկարայի մի խնդիր՝

Կապիկները աշխույժ խմբով միասին
Ուրախ խաղում, թռչկոտում են քե քեի:
Քառակուսին նրանց ութերորդ մասի զվարճանում էր հովտի մեջ ներքևի,
Իսկ պասներկուսը նրանցից բաղեղներին ճոճվում էր անվախ.
Քանի՞սն են, դե՛, սաս՛ ինձ, կապիկներն այս ուրախ:

(Թարգմ. Լ. Թեյլանի)

Այս խնդրին համապատասխանում է

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

քառակուսային հավասարումը:

Քառակուսային հավասարումները մեկնաբանվում են նաև ուզբեկ մաթեմատիկոս Ալ-Խորեզմիի «Հանրահաշիվ» տրակտատում, այնտեղ բերվում են նաև դրանց լուծման եղանակները:

Միայն XVII դարում, հիմնականում շնորհիվ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ֆ.Վիետի (1540-1603) հետազոտությունների, առաջին անգամ 2-րդ աստիճանի, ինչպես նաև 3-րդ և 4-րդ աստիճանի հավասարումները սկսեցին դիտարկել տառային նշանակումներով: Հենց Վիետը առաջին անգամ տառային նշանակումներ մտցրեց ոչ միայն անհայտ մեծությունների, այլ նաև տվածների, այսինքն գործակիցների համար: Վիետը հատկապես շատ էր գնահատում իր հայտնագործած բանաձևերը, որոնք այժմ կոչվում են Վիետի բանաձևեր: Սակայն Վիետը ընդունում էր միայն դրական արմատները:

Միայն XVII դարում Դեկարտի, Նյուտոնի և այլ մաթեմատիկոսների աշխատանքների շնորհիվ քառակուսային հավասարումների լուծումը ընդունեց ժամանակակից տեսք:

Դեռ հնում մաթեմատիկոսները խնդիրներ լուծելիս առնչվում էին բացասական թվից քառակուսի արմատ հանելու հետ. այդ դեպքում խնդիրը համարվում էր անլուծելի: Սակայն աստիճանաբար պարզվեց, որ իրական թվերով տրված շատ խնդիրների լուծումը ստանում է պարզ բացատրություն

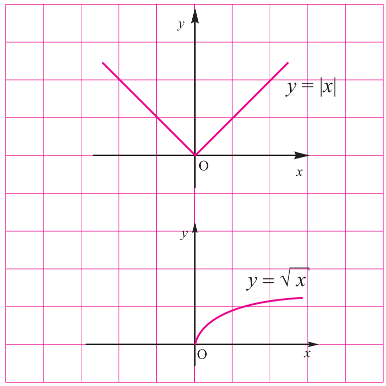
$$a + b\sqrt{-1}$$

արտահայտությունների օգնությամբ, որոնք ի վերջո նույնպես սկսեցին անվանել թվեր, բայց արդեն կոմպլեքս:

Կոմպլեքս թվերի հետ պարզագույն գործողություններ կատարելու առաջին հիմնավորումը տվեց իտալացի մաթեմատիկոս Ռ.Բոմբելլին 1572թ., չնայած երկար ժամանակ կոմպլեքս թվերին վերաբերվում էին որպես ինչ-որ գերբնականի բանի: Լ.Էյլերը կոմպլեքս թվերի տեսության հարցերում էական ներդրում կատարեց: Նրա աշխատանքներից հետո կոմպլեքս թվերը վերջնական ճանաչում ստացան` որպես ուսումնասիրության առարկա և միջոց: «Կոմպլեքս թիվ» անվանումը առաջարկվել է գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Կ.Գաուսի կողմից 1831թ.:

Ներկայումս կոմպլեքս թվերը լայնորեն օգտագործվում են ֆիզիկայում և տեխնիկայում:

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ



7.1 $y = |x|$ ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը

Դիտարկենք $y = |x|$ բանաձևով տրված ֆունկցիան:

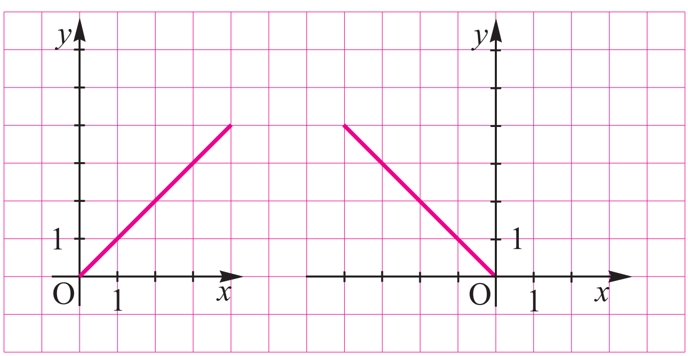
Քանի որ ըստ x թվի մոդուլի սահմանման՝

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ եթե } x \leqslant 0, \end{cases}$$

ապա այդ ֆունկցիան կարելի է գրառել այսպես՝

$$y = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ եթե } x \leqslant 0: \end{cases}$$

Նկ. 38 ա-ում պատկերված է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \geqslant 0$ դեպքում, իսկ նկ. 38 բ-ում՝ $x \leqslant 0$ դեպքում:



ա) բ)

Նկ. 38

Ուստի $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ամբողջ Ox առանցքի վրա ունի նկ. 39-ում պատկերված տեսքը:

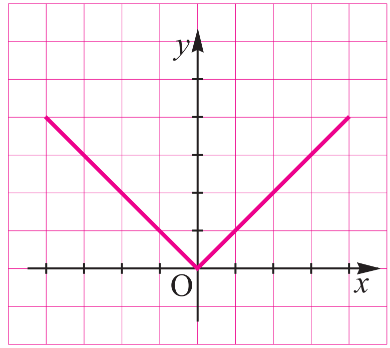
Ձևակերպենք $y = |x|$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները.

1) որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար,

2) ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ,

3) $x \geqslant 0$ դեպքում աճում է, $x \leqslant 0$ դեպքում՝ նվազում:

4) զույգ ֆունկցիա է՝ $|-x| = |x|$:



Նկ. 39

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Կառուցենք $y = |2x + 3|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ըստ մոդուլի սահմանման՝

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, \text{ եթե } 2x+3 \geqslant 0 \\ -(2x+3), \text{ եթե } 2x+3 \leqslant 0 \end{cases}$$

Ուստի կարելի է վարվել այնպես, ինչպես $|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս: Այսինքն միևնույն կոորդինատային համակարգում կառուցել $y = 2x + 3$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$ արժեքների համար, և $y = -2x - 3$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$ արժեքների համար. դա հարմար է կատարել այսպես. ինչպես գիտենք, գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է կառուցել նրա գրաֆիկին պատկանող երկու կետեր:

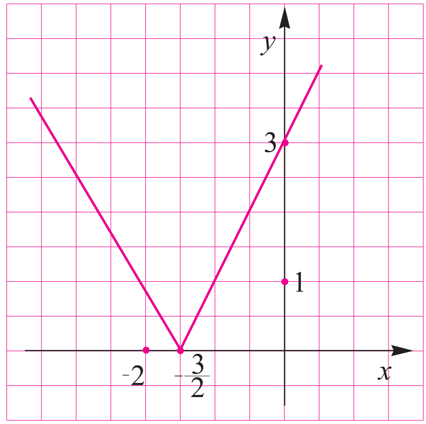
$y = 2x + 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$ միջակայքում կառուցելու համար վերցնենք x-ի երկու արժեքներ՝ $-\dfrac{3}{2}$ և 0:

$$\text{Եթե } x = -\frac{3}{2},\ y = 0, \text{ եթե } x = 0,\ y = 3:$$

$y = -2x - 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$ միջակայքում կառուցելու համար x-ին տանք այդ միջակայքին պատկանող $-\dfrac{3}{2}$ և -2 արժեքները:

Եթե $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = 0$, եթե $x = -2$, $y = 1$:

Վերջնականորեն ստանում ենք նկ. 40-ում պատկերված գրաֆիկը



Նկ. 40

Օրինակ 2. Կառուցենք

$$y = -2|-3x + 1| + 5$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Նորից օգտվելով մոդուլի սահմանումից՝ ստանում ենք՝

$$-2|-3x + 1| + 5 = \begin{cases} -2(-3x + 1) + 5 = 6x + 3, \text{ եթե } -3x + 1 \geqslant 0 \\ 2(-3x + 1) + 5 = -6x + 7, \text{ եթե } -3x + 1 \leqslant 0: \end{cases}$$

Այսինքն պետք է կառուցել $y = 6x + 3$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \leqslant \frac{1}{3}$ միջակայքում և $y = -6x + 7$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ $x \geqslant \frac{1}{3}$ միջակայքում: Դա կարելի է անել, ինչպես նախորդ օրինակում:⌋

667. Բացատրեք՝ ինչպես եք հասկանում

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \geqslant 0 \\ x, \text{ եթե } x \leqslant 0 \end{cases}$$

գրառումը:

668. Պարզեցրեք $|x|$ արտահայտությունը հետևյալ պայմանների դեպքում՝

ա) $x \geqslant 0$; բ) $x > 0$,
գ) $x \leqslant 0$, դ) $x < 0$, ե) $x = 0$:

669. Կառուցեք $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և ձևակերպեք այդ ֆունկցիայի հատկությունները:

670. Կառուցեքֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = 2|x|$, բ) $y = -3|x|$,

⌈գ) $y = \frac{1}{2}|3x - 3|$, դ) $y = -\frac{1}{2}|4x + 1|$,

ե) $y = 2|5x - 1|$, զ) $y = 3|-x - 4| - 2$:⌋

671. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ եթե } x \geqslant 0, \\ -2, \text{ եթե } x < 0; \end{cases}$ բ) $y = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x > 0 \\ 0, \text{ եթե } x = 0 \\ -1, \text{ եթե } x < 0: \end{cases}$

7.2 $y = \frac{k}{x}$ ֆունկցիայի հատկությունները

Որոշակիության համար նախ դիտարկենք $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան:

$y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան որոշված է զրոյից տարբեր ցանկացած x իրական թվերի համար, այլ կերպ ասած $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը զրոյից տարբեր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է:

Նախ այս ֆունկցիան դիտարկենք միայն դրական x-երի համար: Նշենք նրա հետևյալ հատկությունները.

1) *Եթե* $x > 0$, *ապա* $y > 0$:

2) *Դրական* x-*երի համար*

$$y = \frac{1}{x}$$

ֆունկցիան նվազող է, այսինքն արգումենտի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի փոքր արժեք կամ եթե $0 < x_1 < x_2$, ապա $y_1 > y_2$, որտեղ

$$y_1 = \frac{1}{x_1},\ y_2 = \frac{1}{x_2}:$$

Ապացուցենք այս պնդումները:

$x > 0$ դեպքում $\frac{1}{x}$ կոտորակի և համարիչը և հայտարարը դրական թվեր են, դրա համար էլ

$$y = \frac{1}{x} > 0:$$

Դիցուք x_1 և x_2 դրական թվերի համար տեղի ունի $x_1 < x_2$ անհավասարությունը: Այդ դեպքում ըստ թվային անհավասարությունների 5-րդ հատկության (տես կետ 1.1)՝ եզրակացնում ենք, որ $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, այսինքն $y_1 > y_2$:

3)* *Եթե x-ը, դրական մնալով, ձգտում է զրոյի, ապա $y = \frac{1}{x}$-ը ձգտում է $+\infty$, իսկ եթե x-ը ձգտում է $+\infty$, ապա $y = \frac{1}{x}$-ը ձգտում է զրոյի,* այսինքն

$$y = \frac{1}{x} \to +\infty, \text{ երբ } x \to 0 \ (x > 0),$$
$$y = \frac{1}{x} \to 0, \text{ երբ } x \to +\infty:$$

Այս հատկությունը լուսաբանենք օրինակներով:

Եթե դրական x-ը ձգտում է զրոյի՝ ընդունելով $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ արժեքները, ապա $y = \frac{1}{x}$-ը համապատասխանաբար ընդունում է 1, 2, 3, 4, 5 ... արժեքները, այսինքն $y \to +\infty$:

Իսկ եթե $x \to +\infty$, ընդունելով 1, 2, 3, 4 ... արժեքները, ապա y-ը համապատասխանաբար ընդունում է $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ արժեքները, այսինքն ձգտում է զրոյի:

4) *Դրական x-երի համար $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է, այսինքն արգումենտի փոքր փոփոխությանը համապատասխանում է y ֆունկցիայի փոքր փոփոխություն:*

Լուսաբանենք այս հատկությունը օրինակով:

Դիցուք մարզիկը պետք է վազի 1 կմ: Կհամարենք, որ տարածությունը նա անցնում է V կմ/վրկ հաստատուն արագությամբ: Այդ դեպքում ամբողջ ճանապարհը նա կանցնի t վրկ-ում, ընդ որում

$$t = \frac{1}{\mathrm{V}} \qquad (1):$$

Այստեղ t ժամանակը V արագության ֆունկցիա է: Ակնհայտ է, որ արագության փոքր փոփոխությունը բերում է ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսած ժամանակի փոքր փոփոխություն:

Ուստի (1) բանաձևով տրված ֆունկցիան անընդհատ է (հիշեցնենք՝ (1) բանաձևում $\mathrm{V} \neq 0$):

Այս հատկության շնորհիվ դրական x-երի համար $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը անընդհատ գիծ է, այսինքն այն կարելի է նկարել մատիտի անընդհատ շարժումով:

672. ա) Ո՞ր x-երի համար է որոշված $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան:

բ) Դրական x-երի համար $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազո՞ղ է:

գ) Ինչի՞ է ձգտում $y = \dfrac{1}{x}$ -ը, երբ դրական x-ը ձգտում է զրոյի:

դ) Ինչի՞ է ձգտում $y = \dfrac{1}{x}$ -ը, երբ x-ը ձգտում է $+\infty$-ի:

ե) Դրական x-երի համար $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհա՞տ է:

673. Ուղղանկյան մակերեսը 1մ^2 է:
ա) Ի՞նչ արժեքներ կարող են ընդունել նրա կողմերը: Բերեք օրինակներ:
բ) Գտեք այդ ուղղանկյան կողմերը, եթե նրանցից մեկի երկարությունը հավասար է՝ 2 մ, 3 մ, $\dfrac{1}{4}$ մ, $\dfrac{1}{5}$ մ:
գ) Կազմեք այդ ուղղանկյան կողմերի երկարությունների կապն արտահայտող բանաձև:

674. ա) Եթե հավասարաչափ շարժման արագությունը մեծացվի 2 անգամ, ապա ինչպե՞ս կփոխվի տրված հեռավորությունն անցնելու ժամանակը:
բ) Եթե գազով լցված ծավալը փոքրացվի 4 անգամ, ապա ինչպե՞ս կփոխվի գազի խտությունը:
գ) Եթե մեկ դետալի պատրաստման ժամանակը փոքրացվի 3 անգամ, ապա ինչպե՞ս կփոխվի հերթափոխի ընթացքը պատրաստված դետալների թիվը:

675. Հաշվեք $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքները, երբ x-ը հավասար է 1, 2, 3, 4, 5, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{5}$: Արդյունքները լրացրեք աղյուսակով:

676. Տված է $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան: Հաշվեք

ա) $y(1)$; բ) $y(2)$; գ) $y(3)$;
դ) $y(6)$; ե) $y\left(\dfrac{1}{2}\right)$; զ) $y\left(\dfrac{1}{3}\right)$;
է) $y\left(\dfrac{1}{6}\right)$; ը) $y\left(\dfrac{1}{10}\right)$:

677. Համեմատեք կոտորակները՝

ա) $\frac{1}{2}$ և $\frac{1}{3}$;
բ) $\frac{1}{5}$ և $\frac{1}{3}$;
գ) $\frac{1}{4}$ և $\frac{1}{3}$;
դ) $\frac{1}{10}$ և $\frac{1}{11}$:

678. Տված է $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան: Համեմատեք՝

ա) $y(1)$ և $y(2)$;
բ) $y(2)$ և $y(3)$;
գ) $y(1)$ և $y(5)$;
դ) $y(1)$ և $y(3)$;
ե) $y(12)$ և $y(5)$;
զ) $y(4)$ և $y(3)$:

7.3 $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Կառուցենք $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը դրական x-երի համար: Դրա համար հաշվենք $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքները, որոնք համապատասխանում են յուրաքանչյուր x դրական թվի, և ստացված $(x; y)$ կետերը նշենք հարթության վրա տրված xOy դեկարտյան կոորդինատային համակարգում: Բոլոր այդ կետերի համախումբը կազմում է $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը դրական x-երի համար:

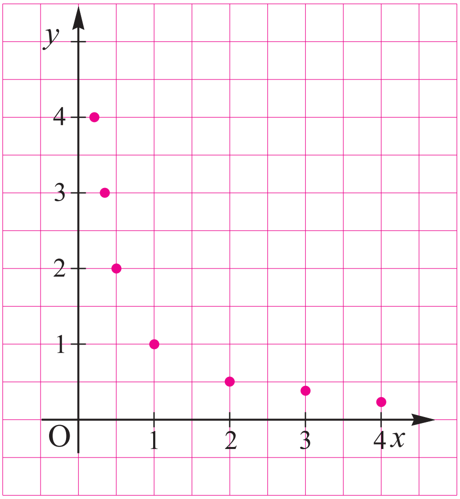
Սակայն այդ աշխատանքը մինչև վերջ կատարելը անհնար է, քանի որ դրական x-երի քանակը անվերջ է: Այնուհանդերձ, մեր ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է կառուցել մոտավորապես: Ընտրենք մեծ թվով դրական x-եր և հաշվենք $y = \frac{1}{x}$ բանաձևով դրանց համապատասխան y-երի արժեքները:

Ստորև բերված է x-ի որոշ արժեքների համապատասխանող աղյուսակ.

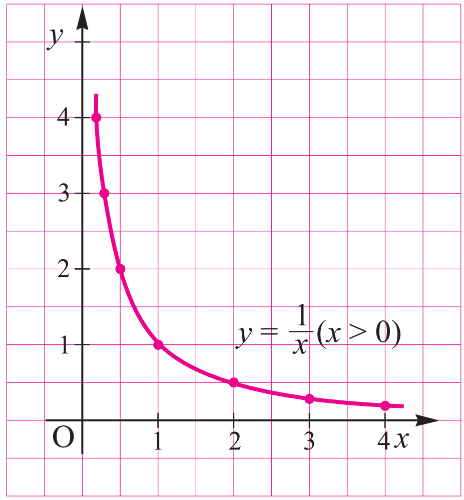
xOy կոորդինատային համակարգում նշենք այդ աղյուսակին համապատասխանող $(x; y)$ թվազույգերը (նկ. 41):

Միացնենք այդ կետերը սահուն անընդհատ գծով, այնպես, որ նրա շարժական կետի y օրդինատը նվազում է նրա աբսցիսի աճմանը զուգընթաց (նկ. 42):

Ստացված անընդհատ կորը կարելի է դիտարկել, որպես $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկ դրական x-երի համար:



Նկ. 41



Նկ. 42

Նշենք, որ նկ. 42-ում պատկերված գրաֆիկը արտացոլում է նախորդ կետում նշված $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի 1, 2, 3, 4 հատկությունները:

Իրոք, $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը դրական x-երի համար դասավորված է Ox առանցքից վերև, ինչը և համապատասխանում է 1 հատկությանը:

Եթե գրաֆիկով շարժվող կետի աբսցիսը մեծանում է, ապա նրա y օրդինատը փոքրանում է, ինչը և համապատասխանում է 2-րդ հատկությանը:

3-րդ հատկությունը կայանում է նրանում, որ եթե $x \to +\infty$, ապա $y \to 0$, իսկ եթե $x \to 0(x > 0)$, ապա $y \to +\infty$: Այս հատկությունը նույնպես ինչ-որ չափով արտացոլված է նկ. 42-ում:

Վերջապես 4-րդ հատկության հիման վրա գրաֆիկը պետք է անընդհատ գիծ լինի, դրա համար էլ մենք ստացված կետերը միացրինք անընդհատ գծով:

$y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը զրոյից տարբեր թվերի բազմությունն է կամ երկրաչափական լեզվով, Ox առանցքի զրոյական կետից տարբեր կետերի բազմությունը: Այդ բազմությունը համաչափ է զրոյական կետի նկատմամբ: Բացի դրանից այդ բազմության ցանկացած x-ի համար տեղի ունի

$$y(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -y(x) \qquad (1)$$

հավասարությունը, այսինքն x-ի նշանը փոխելով հակադիրով՝ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքի նշանը նույնպես փոխվում է հակադիրով:

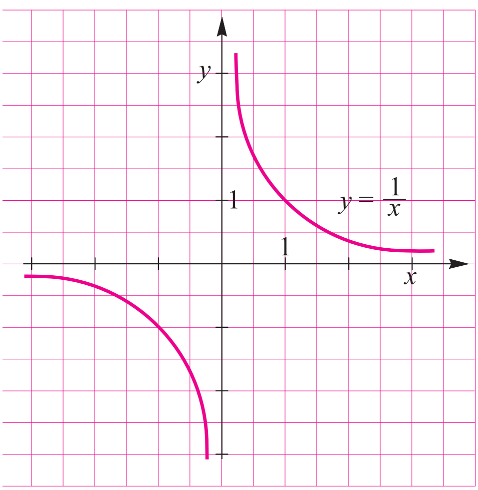
Այդպիսի հատկությամբ օժտված ֆունկցիան անվանում են կենտ ֆունկցիա:

$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան կենտ ֆունկցիա է: Համաձայն (1) հարթության $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի x և $-x$ աբսցիսներն ունեցող կետերը ունեն հակադիր օրդինատներ, դրա համար էլ $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Ուստի բացասական x-երի համար $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է պատկերել արդեն կառուցված գծին կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ գիծ:

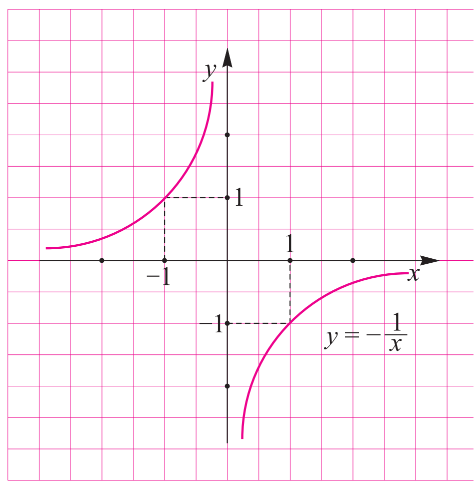
$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը նրա որոշման տիրույթի բոլոր x-երի համար պատկերված է նկ. 43-ում:

$y=\dfrac{1}{x}$ *ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող գիծը անվանում են հիպերբոլ:*

Նշենք, որ $y=\dfrac{1}{x}$ հիպերբոլը բաղկացած է երկու մասից, որոնց անվանում են ***հիպերբոլի ճյուղեր:*** Դրանցից մեկը դասավորված է Ox առանցքի դրական ճառագայթից վերև, մյուսը՝ Ox առանցքի բացասական ճառագայթից ներքև:



Նկ. 43



Նկ. 44

$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից (նկ. 43) երևում է, որ բացասական x-երի համար $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1) *եթե* $x<0$, *ապա* $y<0$:

2) *Բացասական* x*-երի համար* $y=\dfrac{1}{x}$ *ֆունկցիան նվազում է:*

3) *Եթե բացասական x-ը ձգտում է զրոյի, ապա* $y=\frac{1}{x}$ *-ը ձգտում է* $-\infty$, *իսկ եթե x-ը ձգտում է* $-\infty$, *ապա* $y=\frac{1}{x}$ *-ը ձգտում է զրոյի, այսինքն՝* այսինքն՝

$$y=\frac{1}{x}\to-\infty,\ \text{եթե}\ x\to 0\ (x<0),$$

$$y=\frac{1}{x}\to 0,\ \text{երբ}\ x\to-\infty:$$

4) *Բացասական x-երի համար* $y=\frac{1}{x}$ *-ը անընդհատ է:* Այս հատկությունների ապացույցները մենք բաց ենք թողնում:

⌈ Ճիշտ նույն ձևով կառուցվում է նաև $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ k-ն տված ցանկացած դրական թիվ է:

$k<0$ դեպքում $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ կառուցում ենք $y=-\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ($-k>0$) և նրա ճյուղերը համաչափ արտապատկերում Ox առանցքի նկատմամբ: Օրինակ, $y=-\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը նկ. 43-ում պատկերված $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից ստացվում է այսպես՝ (նկ. 44):

Նշենք նաև, որ ցանկացած $k\neq 0$ թվի համար $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են հիպերբոլ:⌋

679. ա) Ո՞րն է $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

բ) Ինչպե՞ս են անվանում $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

գ) Քանի՞ ճյուղ ունի հիպերբոլը:

դ) $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհա՞տ է, կե՞նտ է:

680. Տված է $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան: Ի՞նչ նշանով արժեքներ է ընդունում y-ը եթե $x>0$, եթե $x<0$: Հաշվեք

ա) $y(1)$, $y(3)$, $y(5)$, $y(10)$;

բ) $y(1)$, $y(-2)$, $y(-8)$, $y(-9)$;

գ) $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(1\frac{1}{2}\right)$;

դ) $y(1{,}5)$, $y\left(-5\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-3\frac{1}{3}\right)$:

681. ա) $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան $[1; +\infty]$, $[0; 1]$, $(-\infty; 0)$ միջակայքերում աճո՞ւմ է, թե՞ նվազում:

բ) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան որոշված չէ: Կարո՞ղ է այդ ֆունկցիան ընդունել 0 արժեք:

682. Ապացուցեք, որ $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան

ա) կենտ է;

բ) նվազող է, եթե $x < 0$:

683. Դասավորեք $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքները աճման կարգով.

$y(1)$, $y(-3)$, $y(1{,}5)$, $y(-1)$, $y(3)$, $y\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $y(-0{,}8)$, $y\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $y\left(5\dfrac{1}{2}\right)$:

684. Տված է $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան: Կոորդինատային համակարգում, որտեղ առանցքների վրա միավոր հատվածները 1 սմ են, կառուցեք $\left(x; \dfrac{1}{x}\right)$ կետերը, որտեղ x-ը հավասար է 1, 2, 3, 4, $1\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$:
Միացրեք ստացված կետերը անընդհատ գծով: Այդ գծի վրա նշեք 5, 6, 7, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{7}$ աբսցիսով կետերը:
Օգտագործելով կառուցված գիծը և $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի կենտությունը՝ կառուցեք հիպերբոլի ձախ ճյուղը:

685. $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ որոշեք՝

ա) y-ի արժեքները, եթե x-ը հավասար է 0,2; 0,3; 0,8:

բ) y-ի արժեքները, եթե x-ը հավասար է –3,5; –1,8; –0,4:

գ) x-ի արժեքները, եթե $y(x) = 3$, $y(x) = 5$, $y(x) = -2$:

դ) y-ի արժեքները, եթե $x > 0$, $x > 2$, $x < -3$:

ե) y-ի արժեքները, եթե $0 < x < 1$, $-3 < x < -1$:

686. Պատկանո՞ւմ է արդյոք $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նշված կետը.

ա) $A(2; 0{,}5)$;

բ) $B(4; -1)$;

գ) $C(-25; -0{,}04)$;

դ) $D(6; 0{,}7)$:

687. $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty; 0)$ միջակայքում, ինչպես նաև $(0; +\infty)$ միջակայքում: Բայց այդ ֆունկցիան նվազող չէ իր որոշման տիրույթում: Բացատրեք՝ ինչո՞ւ:

688. Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = -\dfrac{1}{x}$; բ) $y = \dfrac{2}{x}$;

գ) $y = -\dfrac{2}{x}$; դ) $y = \dfrac{6}{x}$;

ե) $y = -\dfrac{8}{x}$; զ) $y = \dfrac{4}{x}$:

689. Ո՞ր կոորդինատային քառորդներում են դասավորված $y = \dfrac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերը $k > 0$, $k < 0$ դեպքում:

7.4 $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը

Յուրաքանչյուր ոչ բացասական x թվի համապատասխանության մեջ դնենք նրա թվաբանական արմատին հավասար y թիվը: Այլ կերպ ասած ոչ բացասական թվերի բազմության վրա տանք $y = \sqrt{x}$ (1) ֆունկցիան:

Այսպիսով, (1) ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ոչ բացասական թվերի բազմությունն է՝ $x \geqslant 0$:

Նշենք (1) ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունները.

1) Եթե $x = 0$, ապա $y = 0$:

2) Եթե $x > 0$, ապա $y > 0$:

3) $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիան աճող է:

4) Եթե $x \to +\infty$, ապա $y \to +\infty$:

5) $y = \sqrt{x}$-ը անընդհատ ֆունկցիա է:

1) Հատկությունը հետևում է այն բանից, որ 0-ի թվաբանական արմատը 0 է:

2) Հատկությունը հետևում է նրանից, որ դրական թվի թվաբանականարմատը դրական է:

3)-րդ հատկությունը հետևում է 3.2 կետում նշված թվաբանական արմատի հատկությունից:

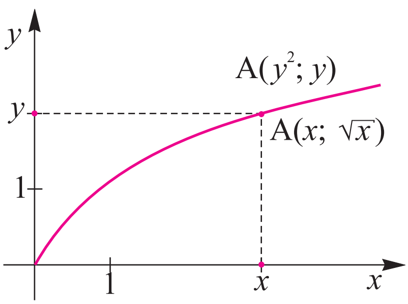
Եթե x-ը ձգտում է պլյուս անվերջի՝ ընդունելով $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, m^2, \ldots$ արժեքներ, ապա $y = \sqrt{x}$-ը ընդունում է $1, 2, 3, 4, \ldots m$, արժեքները և, ակնհայտ է, նույնպես ձգտում է պլյուս անվերջի: x-ի այլ արժեքների համար այդ հատկությունը պահպանվում է: Անցնենք xOy կոորդինատային համակարգում $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցմանը:

5-րդ հատկության ապացույցը կհետևի (1) ֆունկցիայի գրաֆիկի դիտարկումից:

Նախ դիտարկենք

$$x = y^2 (y \geqslant 0) \qquad (2)$$

ֆունկցիան և պատկերենք նրա գրաֆիկը նույն xOy կոորդինատային համակարգում:



Նկ. 45

Այդ գրաֆիկի $y(y \geqslant 0)$ օրդինատն ունեցող կետն ստանալու համար Oy առանցքի վրա նշենք $(0; y)$ կետը (նկ. 45), այդ կետով տանենք Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղ և վերջինիս վրա վերցնենք $x = y^2$ աբսցիս ունեցող A կետը:

A կետը կունենա $A(y^2; y)$ կոորդինատները: Հենց դա էլ (2) ֆունկցիայի գրաֆիկի կետ է:

Ցանկացած ոչ բացասական y-ների համապատասխանող $A(y^2; y)$ կետերի համախմբությունն էլ հենց $x = y^2$ $(y \geqslant 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է:

Սակայն քանի որ $y \geqslant 0$ և $x \geqslant 0$ դեպքում $x = y^2$ և $y = \sqrt{x}$ հավասարություններն արտահայտում են x և y փոփոխականների միջև միևնույն կապը, ապա A կետի կոորդինատները կարելի է գրել նաև $A(x; \sqrt{x})$ տեսքով: Դա ցույց է տալիս, որ (1) ֆունկցիայի գրաֆիկի A կետը միաժամանակ հանդիսանում է նաև (2) ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ:

Սակայն ակնհայտ է նաև հակառակը: Եթե A-ն (2) ֆունկցիայի գրաֆիկի կետ է, ապա այն նաև (1) ֆունկցիայի գրաֆիկի կետ է: Այսպիսով,

$$y = \sqrt{x}\ (x \geqslant 0)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը $x = y^2 (y \geqslant 0)$ պարաբոլի մի մասն է:

Հեշտ է տեսնել, որ (1) ֆունկցիայի գրաֆիկը արտացոլում է (1) ֆունկցիայի 1) - 5) հատկությունները:

Իրոք, այդ ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով. դա 1) հատկությունն է:

(1) ֆունկցիայի գրաֆիկը $x > 0$ դեպքում դասավորված է Ox առանցքից վերև. դա 2) հատկությունն է:

Գրաֆիկը պատկերում է աճող ֆունկցիա. դա 3)-րդ հատկությունն է,

$x \to +\infty$ դեպքում գրաֆիկի համապատասխան կետերի օրդինատները անսահման մեծանում են՝ դա հատկություն 4)-ն է: (1) ֆունկցիայի գրաֆիկը անընդհատ կոր է՝ 5-րդ հատկությունը:

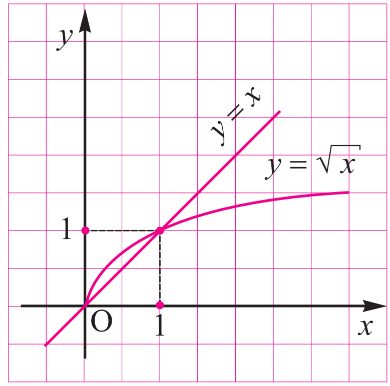
Նշենք $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի ևս երկու հատկություն.

ա) եթե $0 < x < 1$, ապա $x < \sqrt{x}$:

Իրոք, $x < 1$ անհավասարության երկու մասը բազմապատկելով $x > 0$ թվով, ստանում ենք $x^2 < x$, որտեղից հաշվի առնելով $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի աճող լինելը, ստանում ենք՝ $\sqrt{x^2} < \sqrt{x}$ կամ $x < \sqrt{x}$: Նման ձևով ցույց է տրվում հետևյալ հատկության ստույգությունը՝

բ) եթե $x > 1$, ապա $x > \sqrt{x}$:

Այս հատկությունների հիման վրա ստանում ենք, որ $(0;\ 1)$ միջակայքում $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև, իսկ $(1;\ +\infty)$ միջակայքում $y = \sqrt{x}$ ֆուկցիայի գրաֆիկը դասավորված է $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև (նկ. 46):



Նկ. 46

690. ա) Ո՞րն է $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
բ) Թվարկեք $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ ֆունկցիայի հատկությունները:
գ) Ո՞ր կորն է հանդիսանում $y = \sqrt{x} (x \geqslant 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

691. Օգտագործելով
$y = x^2 (x \geqslant 0)$
ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ մոտավորապես որոշեք $\sqrt{y}$-ը y-ի հետևյալ արժեքների համար՝
ա) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
բ) 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5:

692. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $x = 2y$; բ) $x = -5y$; գ) $x = y^2$, դ) $x = 2y - 4$,
ե) $x = y + 5$, զ) $x = 2y^2$, $y \geqslant 0$ դեպքում:

693. Օգտագործելով $y = x$ և $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, բաղդատեք հետևյալ թվերը.
ա) 2 և $\sqrt{2}$ բ) 3 և $\sqrt{3}$ գ) 0,5 և $\sqrt{0,5}$, դ) $\frac{1}{7}$ և $\sqrt{\frac{1}{7}}$:

694. Օգտագործելով $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ցույց տվեք, որ

ա) $\sqrt{10} > \sqrt{5}$; բ) $\sqrt{7} > \sqrt{4}$;

գ) $\sqrt{0,5} > \sqrt{0,4}$; դ) $\sqrt{0,9} > \sqrt{0,4}$:

695. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \sqrt{|x|}$; բ) $y = |\sqrt{x} - 1|$; գ) $y = -\sqrt{x}$;

դ) $y = \sqrt{-x}$; ե) $y = -\sqrt{-x}$; զ) $y = \sqrt{x - 4}$:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Հաշվեք (696-697).

696. ա) $(+1)+(-2)+(-4)+(+5)$;
բ) $(-3)+(+1)+(-2)+(-3)+(+4)+(+3)$;
գ) $(8{,}24-13{,}73)\cdot\left|0{,}2-\dfrac{1}{5}\right|$;
դ) $0{,}2+0{,}02+0{,}002+0{,}0002$;
ե) $-\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{1000}-\dfrac{1}{10000}$;
զ) $(-0{,}014)+4{,}6+(-0{,}086)$.

697. ա) $48\cdot(0{,}6\cdot5-2{,}875)\cdot0{,}25$; բ) $7\cdot4+(0{,}22:11+0{,}58)$;
գ) $0{,}09\cdot37-1{,}37-1{,}96$; դ) $0{,}44\cdot25+0{,}75\cdot3{,}2$;
ե) $(64\cdot4\cdot0{,}125-7{,}8)\cdot12$; զ) $(1{,}215+1{,}499+1{,}75)\cdot99$;
է) $4{,}25\cdot3+1{,}25:5$; ը) $8{,}48:4-0{,}3\cdot0{,}4$;
թ) $2{,}25:(10-1:0{,}2)$; ժ) $(1{,}24+3{,}08):5$;
ի) $(1{,}075-1{,}05):0{,}25$; լ) $0{,}072:0{,}5):0{,}012$:

698. Հաշվեք թվային արտահայտության արժեքը.
ա) $4{,}575:0{,}005+8{,}5:0{,}1$; բ) $21{,}5:(0{,}105+0{,}02)$;
գ) $15{,}2:1{,}9+0{,}51:0{,}17+0{,}48:0{,}08$;
դ) $5:4-4:5+0{,}5:0{,}4-0{,}4:0{,}5$;
ե) $4\cdot\dfrac{2}{21}\,10-19\,\dfrac{20}{21}$; զ) $24\,\dfrac{8}{41}:4-18\,\dfrac{5}{41}:3$;
է) $\dfrac{3}{4}:\dfrac{5}{6}+2\,\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}-1:1\,\dfrac{1}{9}$;
ը) $7\,\dfrac{1}{2}\cdot2\,\dfrac{2}{3}-12\,\dfrac{1}{4}:\dfrac{7}{2}+3\,\dfrac{3}{8}+2\,\dfrac{3}{4}$:

Հաշվեք (699-701).

699. ա) $2\,\dfrac{3}{4}:\left(1\,\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{5}\right)+\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}\right):3\,\dfrac{1}{6}$;
բ) $\left(\dfrac{2}{15}+1\,\dfrac{7}{12}\right)\cdot\dfrac{30}{103}-\left(2:2\,\dfrac{1}{4}\right)\cdot\dfrac{9}{32}$;
գ) $\left(\dfrac{1}{2}+0{,}8-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(3+5\,\dfrac{8}{25}-0{,}12\right)$;

դ) $\left(2\frac{3}{4}+0{,}15-1\frac{8}{25}\right):\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}+0{,}04\right)$;

ե) $\left(2{,}214-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{50}+\left(1\frac{11}{16}+0{,}7125\right):3$;

զ) $1{,}456:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+4\frac{1}{2}\cdot 0{,}8$;

է) $3\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{5}+(2{,}55+2{,}7):\left(0{,}1-\frac{1}{80}\right)$;

ը) $3{,}075:1{,}5-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{25}+3{,}26\right)$;

թ) $\left(1\frac{11}{24}+\frac{13}{36}\right)\cdot 1{,}44-\frac{8}{15}\cdot 0{,}5625$;

ժ) $2{,}88\cdot\frac{35}{72}+\left(1{,}0625-\frac{5}{12}\right)\cdot 16$:

700. ա) $\dfrac{0{,}72-0{,}104-0{,}112\cdot 0{,}5}{0{,}063:1{,}26\cdot 1{,}4}$; բ) $\dfrac{28{,}4\cdot 2{,}5-1{,}34}{1{,}08:1{,}5+6{,}3:0{,}28}$;

գ) $\dfrac{20{,}15-6\cdot 0{,}5+16{,}3}{(0{,}2+11{,}8)\cdot 0{,}5}$; դ) $\dfrac{(7{,}63-5{,}13)\cdot 0{,}4}{3{,}17+6{,}83}$:

701. ա) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+0{,}4+0{,}375\right)\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}\cdot 75}$; բ) $\dfrac{2{,}4\cdot 3\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\cdot 4{,}125}{5\frac{5}{6}\cdot 2\frac{4}{7}}$;

գ) $\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{1\frac{1}{20}+4{,}1}$; դ) $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5\cdot 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}}$;

ե) $\dfrac{\left(1{,}5+2\frac{1}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3{,}3}{14-15\frac{1}{6}:2}$; զ) $\dfrac{\left(0{,}3125\cdot 1\frac{1}{5}+\frac{11}{40}\right):1{,}3}{\left(\frac{18}{25}-0{,}39\right):\frac{33}{50}}$:

702. ա) Կազմեք 1-ից 20 բնական թվերի քառակուսիների աղյուսակ:
բ) Քանի՞ թվանշան կարող է ունենալ միանիշ թվի քառակուսին, երկնիշ թվի քառակուսին:
գ) Քանի՞ թվանշան կարող է ունենալ եռանիշ, քառանիշ, *n*-անիշ թվի քառակուսին:

703. Ընտրելով հարմար միավոր հատված կոորդինատային ուղղի վրա՝ նշեք թվերը՝

ա)1; 0,1; 0,3; 0,5; 1,2;

բ) –2; –1,5; –0,5; –0,2; –0,05;

գ) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$;

գ) $-1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{6}$; $-\frac{11}{12}$:

704. Թվային ուղղի վրա նշված են մի քանի կետեր: Այդ կետերին համապատասխանող թվերի գումարը –1,5 է: Նշված թվերից յուրաքանչյուրը կոորդինատային առանցքով տեղափոխել են ձախ 2 միավորով, որից հետո ստացված թվերի գումարը դարձել է –15,5: Քանի՞ կետ կար:

705. ա) 1 · 2 · 3 .... 13 · 14 · 15 արտադրյալը ներկայացրեք պարզ թվերի աստիճանների արտադրյալի տեսքով

բ) Գտեք հետևյալ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը և ամենամեծ ընդհանուր բաժանորդը:

1) $5^2 \cdot 7^4$ և 490 · 175;

2) $2^5 \cdot 3 \cdot 7$, $3^4 \cdot 5^4 \cdot 72$ և 10000:

գ) 7-ի ո՞ր ամենամեծ աստիճանի վրա է բաժանվում
1 · 2 · 3 · .... · 99 · 100 թիվը:

706. ա) Ո՞ր ոչ հավասար թվերի քառակուսիներն են իրար հավասար:

բ) Ո՞ր դեպքում $(a + b)^2$-ն դրական թիվ չէ:

գ) Ո՞ր ամբողջ թվերի միջև են գտնվում բոլոր դրական կանոնավոր կոտորակների քառակուսիները:

707. Արտահայտությունը գրառեք օգտագործելով աստիճանը.

ա) 7 · 7 · 7 · 7 · 7;

բ) (–2) · (–2) · (–2);

գ) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$;

դ) 1,3 · 1,3 · 1,3 · 1,3 · 1,3;

ե) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$;

զ) $x \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$;

է) $\left(\frac{m}{4}\right) \cdot \left(\frac{m}{4}\right) \cdot \left(\frac{m}{4}\right) \cdot \left(\frac{m}{4}\right)$;

ը) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$;

թ) $(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$;

ժ) $\frac{m-n}{3} \cdot \frac{m-n}{3} \cdot \frac{m-n}{3}$:

708. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $a^3 \cdot a^2$;

բ) $b \cdot b^2 \cdot b^3$;

գ) $y \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$;

դ) $ab \cdot ab^2$;

ե) $x^2y \cdot x^3y^2$;

զ) $2xy \cdot 4x^2y^3$;

է) $\frac{2}{3}x^2y^3z \cdot 2\frac{1}{3}x^3yz$;

ը) $\frac{3}{4}a^3bc^2 \cdot 2\frac{1}{2}abc^2$:

709. Օգտագործելով աստիճանի հատկությունները, բացեք փակագծերը.
ա) $(a^2)^3$; բ) $(a^3)^3$; գ) $(x^4)^2$; դ) $(x^2)^4$;
ե) $(2a^2)^2$; զ) $(3b^5)^2$; է) $(xy^2)^3$; ը) $(a^2bc^3)^2$;
թ) $\left(\frac{1}{2}x^7\right)^4$; ժ) $\left(\frac{3}{4}y^5\right)^3$; ի) $(0{,}5a)^2$; լ) $(1{,}2z^4)^2$;
խ) $(ab^2c^3)^4$; ծ) $(3ab)^2$; կ) $(2ab^5)^6$; հ) $(1{,}1a^2b^7c^{11})^4$:

710. Համեմատեք՝
ա) 10^{20} և 90^{10}; բ) $0{,}1^{10}$ և $0{,}3^{20}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը (711-715).

711. ա) $m^3 \cdot m^2 + m \cdot m^4$; բ) $x^6 \cdot x \cdot x^2 + x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$;
գ) $2x \cdot xy - 3x^2 \cdot \frac{1}{2}y$; դ) $\frac{1}{3}p^2q \cdot 6q^2 - 7pq^2 \cdot \frac{1}{5}pq$;
ե) $(2mn^2)^3 - 3m^2n^6m$; զ) $(5xy^3)^2 - (2xy^3)^2$;
է) $(3x^2y^4)^3 + 7x^4y^3 \cdot \frac{1}{14}x^2y^9$; ը) $(0{,}8a^2b)^2 - 3ab^2 \cdot 0{,}5a^3$:

712. ա) $12ab + 5ab - 7ab$; բ) $8xy - yx + 6xy$;
գ) $2a^2 - 1\frac{1}{3}a^2 - 5\frac{2}{3}a^2$; դ) $0{,}2pq + 7{,}9pq - 5{,}3qp$;
ե) $2m^2n^2 - 5n \cdot 2m^3 \cdot n + 3m^3 \cdot n \cdot n$;
զ) $5a^2b^2b - ab \cdot 3ab^2 - 2ab^2 \cdot 3ba$;
է) $7x - (x + 5)$; ը) $12a - (3b - 5a)$;
թ) $(6m^2 - 2n) - (5n - m^2)$; ժ) $(3p + 10q^2) - (2q^2 + 5p)$:

713. ա) $(a + b - c) \cdot 4$; բ) $3(a - b + c)$;
գ) $2x \cdot (-7a - 3b + 2c)$; դ) $3a^2b - 2ab^2 + b^3) \cdot 2a^2b^2$;
ե) $(-2abc) \cdot (5a - 7b - 3c)$; զ) $(-5ab + 7ac - bc) \cdot (-2abc)$;
է) $(2a - 3b) \cdot (3x - 2y)$; ը) $(5a - 7b) \cdot (-8y + 2x)$;
թ) $(5a - b) \cdot (-2a - 3b)$; ժ) $(-3b - 5b) \cdot (7a - b)$:

714. ա) $(3ab - 2ac) - (5ab - 7ac) + (2ac - 3ab) - (7ac - 5ab)$;
բ) $(4m - 2p + 3q) - (4p - 2q + 3m) + (4q - 2m + 3p)$;
գ) $5x - 3y - (3x + 6y) + (7x - y) - (8x - 15y)$;
դ) $20a - (4b - 5c) + (-17a + 3b - c) - (2a - 2b - 16c)$:

715. ա) $x(x+y)-y(x-y)$; բ) $2(a+b)+3(a-b)$;
գ) $3(x-2y)+2(x-3y)$; դ) $m(p+2q)-p(m-3q)$;
ե) $(a+2)(a-1)-(a+1)(a-2)$; զ) $(x+4)(x-2)-(x+2)(x-1)$;
է) $(a+2)(a-1)-(a+3)(a-2)$; ը) $(n+7)(n-5)-(n+9)(n-7)$;
թ) $(x^2-2x+5)(x^2+x-3)$; ժ) $(x^2-3x+7)(-3+5x+2x^2)$:

Ներկայացրեք բազմանդամի տեսքով (716-717).

716. ա) $(x+y)^2$; բ) $(a-8)^2$; գ) $(2a-3b)^2$;
դ) $\left(xy+\frac{1}{2}y\right)^2$; ե) $(5m^2-2n^3)^2$; զ) $(0{,}2p^3+3q^4)^2$:

717. ա) $(y+x)^3$; բ) $(m-n)^3$; գ) $(2+a)^3$;
դ) $(3a-b)^2$; ե) $(10-x^2)^3$; զ) $(x2+y^2)^3$:

Ներկայացրեք երկանդամի քառակուսու տեսքով (718-719).

718. ա) x^2+2x+1; բ) a^2-6a+9;
գ) $4-4x+x^2$; դ) $49x^2-14x+1$;
ե) x^6+4x^3+4; զ) x^4+10x^2+25:

719. ա) $x^2+x+\frac{1}{4}$; բ) $0{,}09+0{,}6a+a^2$;
գ) $121x^4+44x^2+4$; դ) $2{,}56k^2-9{,}6kp+9p^2$;
ե) $64a^2b^2+48abc+9c^2$; զ) $9a^2b^4+30ab^2c+25c^2$:

Վերլուծեք արտադրիչների (720-722).

720. ա) $4ax-2bx$; բ) $2a^2-2a$;
գ) $48xy-3\mathrm{b}xy^2$; դ) $85ab-170a$;
ե) $mx-nx+px$; զ) $8abx-6acy-10a$;
է) $14anx-21bny-7n$; ը) $63xy-84y^2+98y$:

721. ա) m^2-n^2; բ) $1-x^2$; գ) $64x^2-1$;
դ) $81-9a^2$; ե) m^4-n^2; զ) $121-9p^4$;
է) $9a^2b^2-y^2$; ը) $4a^2b^2-9c^2$; թ) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$;
ժ) $0{,}81b^4-a^2c^2$; ի) a^3+b^3; լ) x^3-1;
խ) a^6+b^6; ծ) m^6-n^6; կ) $27p^3-8q^3$:

722. ա) $(x+1)^2-4x^2$; բ) $x^2+2xy+y^2-1$;
գ) $(a-4)^2-16$; դ) $p^2-2pq+q^2-4$;
ե) $36m^2-(m+9)^2$; զ) $9-x^2-2xy-y^2$;
է) $81q^2-(p+6q)^2$; ը) $4-a^2-2ab-b^2$:

723. Կրճատեք կոտորակը.

ա) $\frac{24}{42}$; բ) $\frac{168}{256}$; գ) $\frac{26ax}{39a^2}$; դ) $\frac{17x^2y^3}{51xy^5}$;

ե) $\frac{16a^2b^3c^5}{24a^3bc^3}$; զ) $\frac{120m^2n^5pq}{450m^5np^2q^4}$; է) $\frac{x-1}{1-x}$; ը) $\frac{6x^3y^2(a-b)}{9xy^3(b-a)}$:

724. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\frac{2x-4y}{x^2-4y^2}$; բ) $\frac{(3-a)^2}{a^2-3a}$; գ) $\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$; դ) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$:

725. Արտահայտությունը ձևափոխեք հանրահաշվական կոտորակի.

ա) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2}$; բ) $x-\frac{1}{a}$; գ) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$;

դ) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x}$; ե) $\frac{a}{x-1}-\frac{2}{1-x}$; զ) $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{n-m}$;

է) $\frac{m}{n}\cdot\frac{n^2}{2m}$; ը) $\frac{a}{2x}:\frac{3a}{8xy}$; թ) $3a\cdot\frac{b}{a}$;

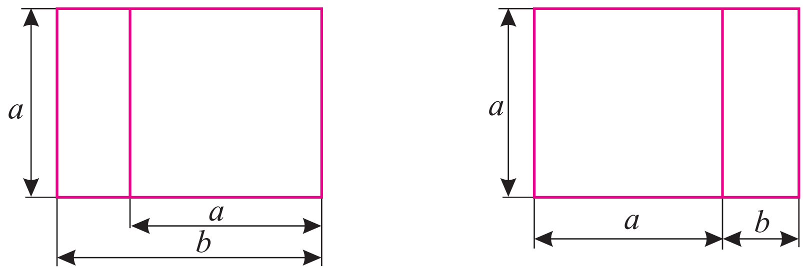
ժ) $7x:\frac{x^2}{2y^2}$; ի) $\frac{a+1}{3}\cdot\frac{7a}{a+1}$; լ) $\frac{x-2}{4x}:\frac{2-x}{3x^2}$:

726. ա) Եթե a-ն և b-ն ուղղանկյան կողմերն են, ապա ի՞նչ են որոշում $A=a\cdot b$, $D=2(a+b)$ բանաձևերը:
բ) Եթե P-ն ապրանքի գինն է (1 կգ-ի արժեքը), իսկ M-ը՝ նրա քանակությունը (կգ), ապա ի՞նչ է արտահայտում A = P M բանաձևը:
գ) Եթե x-ը հանդիսասրահի մեկ շարքի տեղերի թիվն է, իսկ y-ը՝ շարքերի թիվը, ապա ի՞նչ է արտահայտում $M=x\cdot y$ բանաձևը:

դ) Եթե k-ն քառակուսու կողմն է, ապա ի՞նչ են արտահայտում $A=k^2$, $B=4k$ բանաձևերը:
ե) Եթե υ-ն գնացքի արագությունն է, t-ն՝ շարժման ժամանակը, ապա ի՞նչ է արտահայտում $A=\upsilon\cdot t$ բանաձևը:

727. Օգտագործելով նկ. 47-ը՝ բացատրեք՝ ի՞նչ են արտահայտում

$A = ab - a^2$; $A = ab + a^2$



Նկ. 47

բանաձևերը։

728. Համարելով a-ն և b-ն տված թվեր՝ հավասարումը լուծեք x-ի նկատմամբ.

ա) $4x + a = 6x - 8$;
բ) $3x + a = 4x - 2b + 3a$;
գ) $5a + 6x = 8x - 3a$;
դ) $7a - b - 4x = 3b + 5x - 2a$;
ե) $2(x + a) = 3(x - a)$;
զ) $5(x - b) = 2(a - x)$;
է) $a - (a + b)x = (2 - a)x = (2 - a)x - (3 + bx)$;
ը) $3x - a(b + x) = a(b - x) - 2(a - x)$։

Լուծեք հավասարումների համակարգը (729-731).

729. ա) $\begin{cases} x + y = 13, \\ y = x - 4; \end{cases}$
բ) $\begin{cases} 3x + 4y = 230, \\ y = 5x; \end{cases}$
գ) $\begin{cases} 13x - 14y = 27, \\ 13x = 2y + 15; \end{cases}$
դ) $\begin{cases} 8x - 9y = 1, \\ 3y = 4x + 1; \end{cases}$
ե) $\begin{cases} x - 3y = 12, \\ 2x + 4y = 90; \end{cases}$
զ) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x + 4y = 7; \end{cases}$
է) $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 5x + 3y = -1; \end{cases}$
ը) $\begin{cases} 2x + 5y = 25, \\ 4x + 3y = 15; \end{cases}$
թ) $\begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = 1; \end{cases}$
ժ) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 7x + 5y = 2; \end{cases}$
ի) $\begin{cases} 4x - 7y = 2, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$
լ) $\begin{cases} 4x + 4y = 1, \\ 3x + 3y = -5։ \end{cases}$

730. ա) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x + 3y = 4; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 2x + 2y = 5; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3x - 5y = 4, \\ 2x + 6y = 3; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 4x + 3y = 2, \\ 5x - 2y = 3; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = -5, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1: \end{cases}$

731. ա) $\begin{cases} \frac{1}{4}y = \frac{1}{5}x - 1, \\ \frac{1}{4}y = \frac{2}{5}x - 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x - \frac{5}{2}y = 4, \\ 3x - \frac{7}{2}y = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 6, \\ 3x - 4y = 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{y}{3} = -1, \\ \frac{5x}{3} - \frac{35y}{12} = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 3(3x - y) + \frac{2}{5}(x - 2y) = 17, \\ 5x + y = 3; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 2(2y - x) + \frac{1}{7}(y + 3x) = 1, \\ 5y + x = 7; \end{cases}$

է) $\begin{cases} \frac{x + 3y}{2} = \frac{x - 2y}{3} + 31, \\ x + y = \frac{3}{4}(x - y) + 27; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x}{3} = 1, \\ x - \frac{x + y}{2} = 3; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1, \\ \frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1; \end{cases}$ ժ) $\begin{cases} \frac{2x - y + 3}{3} - \frac{x - 2y + 3}{4} = 4, \\ \frac{3x - 4y + 3}{4} + \frac{4x - 2y - 9}{3} = 4: \end{cases}$

732. ա) Ինչպե՞ս են տոկոսը ներկայացնում տասնորդական կոտորակով:
բ) Ինչպե՞ս փոխարինել տասնորդական կոտորակը տոկոսով:
գ) Ինչպե՞ս են գտնում տված թվի տոկոսը:
դ) Ինչպե՞ս գտնել թիվը նրա տված տոկոսով:

733. Գտեք՝
ա) 100-ի 25%-ը; բ) 1,2-ի 50%-ը; գ) 200-ի 30%-ը;
դ) 30-ի 20%-ը; ե) 30-ի 6%-ը; զ) 4,2-ի 3%-ը:

734. ա) Ծովի ջուրը պարունակում է 5% աղ (զանգվածով): Քանի՞ կիլոգրամ թորած ջուր պետք է ավելացնել 50 կգ ծովի ջրին, որ ստացված ջրում աղի պարունակությունը կազմի 2%:
բ) 10 կգ զանգվածով պղնձի և անագի համաձուլվածքը պարունակում է 45% պղինձ: Որքա՞ն մաքուր անագ պետք է ավելացնել այդ համաձուլվածքին, որ նոր ստացված համաձուլվածքում պղինձը կազմի 40%:

735. ա) Մինչև չորացնելը հացահատիկի խոնավությունը 20% էր: Այդ հացահատիկից 10 ց չորացնելուց հետո նրա զանգվածը փոքրացավ 100 կգ-ով: Որոշեք հացահատիկի խոնավությունը չորացնելուց հետո:
բ) Պահեստում պահվող հացահատիկի խոնավությունը 20% էր: Չորացնելուց հետո խոնավությունը դարձավ 15%: Որքա՞ն դարձավ հացահատիկի զանգվածը, եթե այն սկզբում 50 տ էր:
Դիտողություն: Հացահատիկի խոնավությունը արտահայտվում է նրանում ջրի պարունակությունը տոկոսներով:

736. ա) Ստուգումից պարզվեց, որ հացահատիկի խոնավությունը 23% է, իսկ չորացնելուց հետո՝ 12%: Քանի՞ տոկոսով թեթևացավ հացահատիկը չորացնելուց հետո:
բ) Սերմերը անձրևի տակ մնալուց հետո 20%-ով ծանրացան: Երբ դրանք չորացրին, զանգվածը պակասեց 20%: Արդյոք ստացվե՞ց սկզբնական զանգվածը:

737. Մի աշխատանք կատարելիս բանվորի արտադրողականությունը ավելացավ p%-ով: (⌈արտադրողականությունը միավոր ժամանակում ստացված արդյունքի քանակն է⌋): Քանի՞ տոկոսով կրճատվեց այդ աշխատանքի համար ծախսված ժամանակը, եթե
ա) $p = 25$, բ) $p = 20$:

738. Մի դետալի պատրաստման ժամանակը փոքրացավ 40%-ով: Քանի՞ տոկոսով ավելացավ աշխատանքի արտադրողականությունը:
բ) Շինարարական աշխատանքների ծավալը ավելացավ 80%-ով: Քանի՞ տոկոսով պետք է ավելացնել բանվորների թիվը այդ աշխատանքը նույն ժամկետում ավարտելու համար, եթե աշխատանքի արտադրողականությունն ավելացվի 20%-ով:

739. ա) Գրքի գինը իջեցվեց այնքան տոկոսով, որքան կոպեկով որ այն իջեցվել է: Ո՞րն էր գրքի սկզբնական գինը:
բ) Տարբեր մակնիշի երկու ավտոմեքենաներ ունեն 160 կմ/ժ և 140 կմ/ժ մաքսիմալ արագություններ: Քանի՞ տոկոսով է երկրորդ մեքենայի արագությունը փոքր առաջինի արագությունից: Քանի՞ տոկոսով է առաջին մեքենայի արագությունը մեծ երկրորդի արագությունից:

740. Կոորդինատային ուղղի վրա նշեք մեկ ռացիոնալ և մեկ իռացիոնալ թիվ, որոնք գտնվում են տված թվերի միջև.
ա) 0,5 և 0,15 բ) 0,272999143... և 0,2730015 ...

771. Արտահայտության արժեքը ռացիոնալ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է`
ա) $1+\sqrt{3}$; բ) $1-\sqrt{5}$;
գ) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; դ) $\sqrt{16}-\sqrt{23}$:

742. Նշեք երկու իռացիոնալ թիվ, այնպես որ նրանց
ա) տարբերությունը լինի ռացիոնալ թիվ:
բ) Արտադրյալը լինի ռացիոնալ թիվ:
գ) Գումարը լինի ռացիոնալ թիվ:

743. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ռացիոնալ թվի քառակուսի արմատը
ա) միշտ հանդիսանում է իռացիոնալ թիվ.
բ) կարող է լինել ամբողջ թիվ.
գ) կարող է լինել վերջավոր տասնորդական կոտորակ.
դ) կարող է լինել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ:

744. Տված է $y=x^2$ ֆունկցիան: Ինչպիսի՞ թվեր են` ռացիոնալ, թե իռացիոնալ, այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնց օրդինատներն են` 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Գտեք իռացիոնալ աբսցիսների մոտավոր արժեքները պակասորդով 0,01 ճշտությամբ:

745. Համեմատեք արտահայտությունների արժեքները (առանց արմատը հաշվելու)
ա) $5\sqrt{12}$ և $3\sqrt{27}$; բ) $\sqrt{27}$ և $3\sqrt{2}$;
գ) $2\sqrt{50}$ և $3\sqrt{32}$; դ) $\sqrt{\frac{3}{8}}$ և $\sqrt{\frac{3}{2}}$;
ե) $2\sqrt{\frac{4}{75}}$ և $3\sqrt{\frac{25}{243}}$; զ) $5\sqrt{\frac{45}{72}}$ և $4\sqrt{\frac{45}{32}}$:

746. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; բ) $\sqrt{(5-\sqrt{5})^2}$;

գ) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; դ) $\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$:

747. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից՝

ա) $\sqrt{3(2-\sqrt{5})^2}$; բ) $\sqrt{18(\sqrt{3}-2)^2}$;

գ) $\sqrt{32(2-\sqrt{7})^4}$; դ) $\sqrt{48(\sqrt{5}-3)^4}$:

748. Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը՝

ա) $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$; բ) $\sqrt{6\frac{6}{35}}=6\sqrt{\frac{6}{35}}$;

գ) $\sqrt{4\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{1}{2}}$:

749. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից՝

ա) $\frac{2}{3}a\sqrt{72a^3b}$; բ) $\frac{3}{x}\sqrt{\frac{a^5x^2}{18}}$; գ) $x^3\sqrt{\frac{12a^2b}{49x^4}}$;

դ) $\frac{x}{4}\sqrt{\frac{64a^2b^4}{81x^3y^5}}$; ե) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}}$; զ) $\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{3})^2}}$;

է) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{5})^2}}$; ը) $\sqrt{\frac{(\sqrt{7}-3)^2}{(\sqrt{10}-3)^2}}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

750. ա) $10\sqrt{\frac{2}{5}}-0{,}5160+3\sqrt{1\frac{1}{9}}$;

բ) $15\sqrt{\frac{3}{5}}-0{,}560+2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

գ) $2\sqrt{8\frac{1}{2}}-136-5\sqrt{1\frac{9}{25}}$;

դ) $6\sqrt{2\frac{1}{3}}-84+4\sqrt{1\frac{5}{16}}$:

751. ա) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

բ) $\left(3\sqrt{\dfrac{5}{6}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)\left(3\sqrt{\dfrac{5}{6}}+\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$;

գ) $\left(\sqrt{13+5\sqrt{4,2}}+\sqrt{13-5\sqrt{4,2}}\right)^2$;

դ) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$:

752. ա) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; բ) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

գ) $\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(4-\sqrt{15})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; դ) $\dfrac{(\sqrt{75}+\sqrt{50})(5-2\sqrt{6})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$:

753. Արտահայտությունը ներկայացրեք քառակուսիների պարբերության տեսքով և վերլուծեք արտադրիչների՝ ($a>0$, $b>0$)

ա) a^2-b; բ) $a-b^2$; գ) $a-b$; դ) $a-1$;
ե) $2-3a$; զ) $5b-7$; է) $ab-1$; ը) $a-bx^2$:

754. Երկանդամը ներկայացնելով մեկ այլ երկանդամի քառակուսու տեսքով՝ նրանից քառակուսի արմատ հանեք։

ա) $3+2\sqrt{2}$; բ) $4-2\sqrt{3}$; գ) $7+2\sqrt{10}$;
դ) $7+4\sqrt{3}$; ե) $10-2\sqrt{21}$; զ) $7-\sqrt{24}$:

755. Պարզեցրեք արտահայտությունը՝

ա) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; բ) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;
գ) $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$; դ) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}+\sqrt{10+2\sqrt{21}}$:

756. Կոտորակի հայտարարը ազատեք իռացիոնալությունից՝

ա) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$; բ) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; գ) $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; դ) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}$;

ե) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$; զ) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$; է) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$; ը) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$;

թ) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-5}$; ժ) $\dfrac{a}{\sqrt{a}-a}$; ի) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; լ) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;

խ) $\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}$; ծ) $\dfrac{\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}$:

757. Ապացուցեք, որ հավասարությունը ճիշտ է՝

ա) $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=6;$

բ) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}};$

758. Պարզեցրեք արտահայտությունը

ա) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right);$

բ) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}-a};$

գ) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y};$

դ) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-6}-\dfrac{3}{\sqrt{m}+6}+\dfrac{m}{36-m}$:

759. Իրար հետևից գրեցին չորս իրար հաջորդող թվանշան, այնուհետև առաջին երկուսի տեղերը փոխեցին: Ստացված քառանիշ թիվը բնական թվի քառակուսի է: Գտեք այդ թիվը:

760. Միաժամանակ վառեցին նույն երկարությամբ երկու մոմ: Մոմերից մեկը հաստ է (կարող է վառված մնալ 4 ժամ), մյուսը՝ բարակ (վառվում է 2 ժամ): Որոշ ժամանակ անց երկու մոմը հանգցրին: Պարզվեց, որ հաստ մոմի մնացորդը 3 անգամ երկար է բարակ մոմի մնացորդից: Որքա՞ն ժամանակ էին վառվել մոմերը:

761. ա) Մի բրիգադը առաջադրանքը կարող է կատարել 36 օրում, մյուսը՝ 45 օրում: Աշխատելով միասին՝ քանի՞ օրում նրանք կկատարեն առաջադրանքը:
բ) Առաջին խողովակով ավազանը լցվում է 16 րոպեում, երկրորդով՝ 48 րոպեում: Երկու խողովակներով միասին քանի՞ րոպեում կլցվի ավազանը:
գ) Մարդատար մեքենան երկու քաղաքների միջև եղած հեռավորությունն անցնում է 42 րոպեում, բեռնատարը՝ 56 րոպեում: Քանի՞ րոպեից նրանք կհանդիպեն, եթե միաժամանակ դուրս գան այդ քաղաքներից իրար ընդառաջ:

762. Առաջին խողովակով ավազանը լցվում է a ժամում, երկրորդով՝ b ժամում, երրորդով՝ c ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի ավազանը երեք խողովակով միասին, եթե
ա) $a = 21$, $b = 24$, $c = 28$; բ) $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$:

763. Ավազանը լցվում է երեք խողովակով. միայն առաջին խողովակով՝ a ժամում, միայն երկրորդով՝ c ժամում, իսկ երեք խողովակով միասին՝ x ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի ավազանը միայն երրորդ խողովակով, եթե՝
ա) $a = 12$, $c = 28$, $x = 6$; բ) $a = 9$, $c = 30$, $x = 5$:

764. Որոշ տարածություն ավտոմեքենան սարն ի վեր անցավ 42 կմ/ժ արագությամբ, իսկ սարն ի վար՝ 56 կմ/ժ արագությամբ: Ինչպիսի՞ն է մեքենայի շարժման միջին արագությունը ամբողջ տարածության վրա:
Լուծում: Այստեղ պահանջվում է իմանալ՝ ինչպիսի հաստատուն արագությամբ կարելի է անցնել ամբողջ տարածությունը նույն ժամանակամիջոցում: Դիցուք տարածությունը S կմ է: Այդ դեպքում գնալու և վերադառնալու վրա՝ 2 S կմ-ը մեքենան անցել է ծախսելով

$$\frac{S}{42} + \frac{S}{56} = \frac{S}{24} \text{ ժամ:}$$

Ուստի շարժման միջին արագությունը հավասար է

$$2S : \frac{S}{24} = 24 \text{ կմ/ժ:}$$

765. Ավտոմեքենան որոշ տարածություն սարն ի վեր անցավ a կմ/ժ արագությամբ, իսկ սարն ի վար՝ b կմ/ժ արագությամբ: Ինչպիսի՞ն է մեքենայի շարժման միջին արագությունը, եթե
ա) $a = 40$, $b = 60$; բ) $a = 30$, $b = 45$:

766. Նավակը A-ից B լողում է a ժամում, իսկ B-ից A (հոսանքին հակառակ)՝ b ժամում: Քանի՞ ժամ կլողա գերանը A-ից B, եթե
ա) $a = 3$, $b = 4$; բ) $a = 2$, $b = 3$:

767. 300 գ. զանգվածով առաջին համաձուլվածքը պարունակում է 20% անագ, իսկ 200 գ զանգվածով երկրորդ համաձուլվածքը՝ 40% անագ: Քանի՞ տոկոս անագ է պարունակում այդ համաձուլվածքներից ստացված համաձուլվածքը:

768. m_1 և m_2 զանգվածներով համաձուլվածքները համապատասխանաբար պարունակում են p_1 և p_2 տոկոս անագ: Գտեք այդ կտորներից ստացված համաձուլվածքում անագի պարունակության p տոկոսը, եթե
ա) $m_1 = 15$, $p_1 = 40$, $p_2 = 20$
բ) $m_1 = 35$, $p_1 = 40$, $m_2 = 15$, $p_2 = 20$:

769. Ապացուցեք, որ նախորդ խնդրում $p_1 < p_2$ պայմանից հետևում է, որ $p_1 < p < p_2$:

770. m_1 զանգվածով անագի և կապարի առաջին համաձուլվածքը պարունակում է p_1% անագ, իսկ երկրորդ համաձուլվածքը պարունակում է p_2% անագ: Երկրորդ կտորից քանի՞ գրամ պետք է ավելացնել առաջինի վրա, որպեսզի ստացվի p% անագ պարունակող համաձուլվածք, եթե
ա) $m_1 = 300$, $p_1 = 40$, $p_2 = 60$, $p = 56$,
բ) $m_1 = 180$, $p_1 = 45$, $p_2 = 70$, $p = 60$:

771. Պղնձի և ցինկի 36 կգ համաձուլվածքը պարունակում է 45% պղինձ: Քանի՞ կգ պղինձ պետք է ավելացնել այդ համաձուլվածքին, որպեսզի նոր համաձուլվածքը պարունակի 60% պղինձ:

772. Պղնձի և անագի 12 կգ զանգվածով համաձուլվածքը պարունակում է 45% պղինձ: Քանի՞ կգ անագ պետք է ավելացնել այդ համաձուլվածքին, որպեսզի նոր համաձուլվածքը պարունակի 40% պղինձ:

773. Որքա՞ն մաքուր ջուր պետք է ավելացնել 4% աղ պարունակող 300 գ ծովաջրին, որպեսզի ստացվի 3% աղ պարունակող ջուր:

774. Որքա՞ն մաքուր արծաթ պետք է ավելացնել 200 գ 835 հարգի արծաթին, որպեսզի ստացվի 875 հարգի արծաթ:
Դիտողություն: 835 հարգի 1 գ արծաթը պարունակում է 0,835 գ մաքուր արծաթ:

775. Երկու համաձուլվածք պարունակում են համապատասխանաբար 60% և 40% անագ: Յուրաքանչյուր համաձուլվածքից որքա՞ն պետք է վերցնել, որպեսզի ստացվի 45% անագ պարունակող 600գ համաձուլվածք:

776. Երկու համաձուլվածք պարունակում են համապատասխանաբար p_1 և p_2 տոկոս անագ: Յուրաքանչյուրից որքա՞ն պետք է վերցնել, որպեսզի ստացվի p% անագ պարունակող m գ համաձուլվածք, եթե
ա) $m = 450$, $p_1 = 70$, $p_2 = 40$, $p = 60$;
բ) $m = 600$, $p_1 = 80$, $p_2 = 65$, $p = 75$:

777. ***Լ.Ֆ.Մագնիցկիի «Թվաբանությունից»:*** Մի մարդ վաճառում էր երկու տեսակի գինի: Առաջին տեսակի գինու մի դույլը արժեր 10 գրիվեն (դրամական միավոր է), իսկ երկրորդ տեսակինը՝ 6 գրիվեն: Նա ցանկացավ երկու գինիներից որոշակի մասեր վերցնելով ստեղծել գինի, որի մի դույլը արժենար 7 գրիվեն: Յուրաքանչյուր գինուց որքան մաս պետք է վերցնել 1 դույլ երրորդ գինի ստանալու համար, որն արժենա 7 գրիվեն:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1.1

11. ա) $y = 5 - x$; բ) $y = 2x - 3$; գ) $y = 1{,}5x + 7{,}5$; դ) $y = 0{,}6x - 1{,}6$: **12.** ա) $y = 4x + 3$; բ) $y = \frac{1}{3}x + 2$; գ) $y = 2 - 3x$: **13.** ա) $x = 3y - 2$; բ) $x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$; գ) $x = 2y - 3$:
16. ա) $a = -2{,}5$; բ) $b = 25$:

1.2

27. ա) $a = 2$, $b = 2$; բ) a-ն ցանկացած թիվ է, $b = 2$:

1.3

30. ա) (14; 7), բ) (10; –2), գ) (2; 6), դ) (3; 21): **31.** ա) (3; 2), բ) (4; 2), գ) (5; 3), դ) (1; –1), ե) (3; 4), զ) (–2; 1), է) (31; 7), ը) (2; 1), թ) (1; –1), ժ) (0; –3), ի) (8; – 4), լ) (–3; 3):
32. ա) (2; –3), բ) (7; –13), գ) (2; 3), դ) (–1; –2), ե) (–2; 3), զ) (4; –5): **33.** ա) $\left(-\frac{25}{17}; \frac{23}{17}\right)$, բ) $\left(\frac{1}{6}; -\frac{3}{2}\right)$:

1.4

34. ա) (–5; 4), բ) (0; 1), գ) (5; –18), դ) (–4; –11): **35.** ա) (4; –1), բ) (–5; –1), գ) (0,5; 2,5), դ) (–1; 5): **36.** ա) (–1; 2), բ) (5; –2), գ) (7; 18), դ) (2; –1), ե) (0; 3), զ) (7; 5), է) (7; –2), ը) (5; –6): **37.** ա) (–2; 2), բ) (2; 3), գ) (1; 1), դ) (–3; –3): **38.** ա) $\left(\frac{2}{9}; 2\frac{5}{9}\right)$, բ) (0; 2):

1.5

43. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո: **49.** $a = 9{,}5$: **50.** Այո:

1.6

55. ա) (x; $0{,}5 - x$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, բ) (0,5; 0), գ) լուծում չունի, դ) (x; $0{,}5x - 2$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է: **57.** ա) լուծում չունի, բ) $\left(15; -11\frac{1}{3}\right)$, գ) (7; 5), դ) (5; –2), ե) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$, զ) լուծում չունի: **59.** ա) լուծում չունի, բ) (–3; 7), գ) լուծում չունի, դ) (x; $x + 2$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, ե) լուծում չունի, զ) (0; y), որտեղ y-ը ցանկացած թիվ է, է) լուծում չունի:

1.7*

61. ա) (1; 1; 1), բ) (1; 4; 2), գ) (2; 1; 3), դ) (3; 2; 1), ե) (1; 1; 1), զ) (2; 0; 1), ը) (2; 3; –1), է) (3; 3; 3):

1.8*

62. ա) (14; 3), բ) (–7; –5), գ) (3; 5), դ) (2; 2; 2), ե) (–3; 9; 0), զ) (5; 5; 5): **63.** ա) (2; 1), բ) (3; 2), գ) (1; 1), դ) (2; 1; 0), ե) (0; 0; 1), զ) (1; 1; 1), է) (1; y; $-y$), որտեղ y-ը ցանկացած թիվ է, ը) (x; 2; $4 - x$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, թ) (1; 1; 1), ժ) (2; 1; –1):

1.9

74. ա) 0,5, բ) 2: 91. ա) $a = -0{,}25$, $b = -5$, բ) $a = -1$, $b \neq -2$:

1.10

79. ա) 3 և 7, բ) 6 և 15: **80.** ա) 23 և 17, բ) 4 և 19: **81.** ա) 11 և 5, բ) 6 և 18; 8,4 և 25,2: **82.** ա) 13 և 6, բ) 50 և 60: **83.** ա) 3 և 5, բ) 2,5 և 4: **84.** ա) 28 կմ, բ) 42 կմ: **85.** 80 դետալ: **86.** 12 և 45 կմ/ժ: **87.** 24 և 17 կմ: **88.** 11 և 15 սմ: **89.** 20 տոմս՝ 100 ռուբլի արժեքով և 10 տոմս՝ 150 ռուբլի արժեքով: **90.** Բազկաթոռն արժե 8000 ռ, սեղանը՝ 2000 ռ: **91.** 6: **92.** 45: **94.** 40 և 25 մ: **95.** 500 ռ և 300 ռ: **96.** 100 հրուշակ և 200 բուլկի: **97.** 600 և 400: **98.** 51 և 33,6: **99.** 9, 13 և 16 սմ: **101.** 41, 53 և 66 սմ: **102.** 42: **104.*** 16, 10 և 10: **105.** 40 և 170 ռուփի: **106.** 400 գ: **107.** ա) 125 կգ, բ) 20, 25, 30 և 35, գ) 6, 5, 4, 3, 3, 2 և 1 տարեկան: **108.** 60, 45 և 40 ընկույզ: **109.** ա) 3 ժ, բ) 4 ժ, գ) 5 ժ: **110.** 75: **111.** 7 հինգ ռուբլիանոց և 4 տաս ռուբլիանոց թղթադրամներ: **112.** 4 ժամում:

2.1

115. ա) 1, բ) 1, գ) 1, դ) 1: **116.** ա) 2, բ) 1, գ) $\frac{1}{2}$, դ) $\frac{1}{4}$: **117.** ա) 1, բ) արտահայտությունն իմաստ չունի: **118.** ա) 2^3, բ) 2^8, գ) 3^{-2}, ե) 3^{-1}, զ) 3^{-4}, է) 5^1, ը) $16^{-1} = 4^{-2} = 2^{-4}$: **119.** ա) 10000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,001; 0,0001, բ) 32; 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$, գ) –27; 9; –3; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{27}$: **120.** ա) 1; –1; –1; –1; –1, բ) 1; –1; 1; 1; –1, գ) $\frac{1}{4}$; –4; 4; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$: **128.** ա) a^{-1}, բ) a^1, գ) a^3, դ) a^0, ե) a^{-10}, զ) a^9:

2.2

131. ա) a^6b^{-15}, բ) $a^{14}b^{-4}$, գ) $a^{12}b^{20}$: **138.** ա) $3^4 > 4^3$, բ) $2^4 = 4^2$, գ) $10^{20} > 20^{10}$, դ) $100^{200} > 200^{100}$, ե) $1999^{2000} > 1998^{1999}$: **139.** ա) $(a^2)^5$, բ) $(a^2)^6$, գ) $(a^2)^{21}$: **140.** ա) $(a^5)^{10}$, բ) $(a^2)^{25}$, գ) $(a^{10})^5$: **144.** $(a^{-2})^{-25}$, բ) $(a^{-5})^{-10}$, գ) $(a^{10})^5$, դ) $(a^{-10})^{-5}$, ե) $(a^{-25})^{-2}$:

2.3

154. ե) $\frac{(x-y)^2}{4xy}$, զ) $\frac{5m}{7n(a-b)}$, է) $\frac{p}{2q}$, ը) $\frac{4(a+b)}{9}$: **160.** բ) $\frac{2(a-b)}{a^2-ab+b^2}$, ժ) x^2+xy+y^2:

2.4

165. ա) $\frac{x}{x-2}$ և $\frac{-1}{x-2}$, ե) $\frac{15}{2x-8}$ և $\frac{14}{2x-8}$, զ) $\frac{2x-6}{2x-10}$ և $\frac{5}{2x-10}$:

2.5

175. ա) -1, բ) $\frac{2}{x-y}$, գ) $\frac{5a}{a-b}$, դ) $\frac{3m+3}{n-m}$: **177.** $\frac{3a}{2}$, բ) $\frac{2x}{3}$: **180.** ա) $\frac{2a+b}{a(a+b)}$, բ) $\frac{2a}{a^2-b^2}$, է) $\frac{5a^2-4ab}{(a-2b)(a+b)}$, ը) $\frac{4x^2-xy}{(x-y)(2x-y)}$: **182.** ա) $-\frac{1}{12x}$, բ) $\frac{9}{4m}$, գ) $\frac{2q+3}{pq}$, դ) $\frac{a-by}{xy}$, ե) $\frac{m^2-n}{mn^2}$, զ) $\frac{a^2+12b}{3ab^2}$: **183.** ա) $\frac{m(b+c)}{abc}$, բ) $\frac{a(2b-5n)}{bmn}$, գ) $\frac{2ab-8b^2+4a}{bm}$, դ) $\frac{z-y}{yz}$:
184. ա) $\frac{2x-3}{x^3}$, բ) $\frac{7-3am^2}{m^4}$, գ) $\frac{a^4+b^4}{a^5b^7}$, դ) $\frac{4b^2-3x^2}{b^5x^4}$, ե) $\frac{3az^4-3bx^6y}{x^7y^5z^5}$, զ) $\frac{mn(3ac^5n+b^3m^6)}{a^4b^6c^9}$:
185. ա) $\frac{1}{a-1}$, բ) $\frac{13a}{6(x+1)}$, գ) $\frac{1}{2}$, դ) $\frac{1}{5}$, ե) $\frac{5}{a+b}$, զ) $\frac{y^2-x^2}{xy(a-b)}$, է) $-\frac{1}{xy}$, ը) $\frac{n+1}{mn(m-2n)}$, թ) $\frac{3+2p}{p^2q(2p-3q)}$, ժ) $\frac{19}{6a^2(a-4b)}$: **186.** ա) $\frac{5a+9}{a^2-9}$, բ) $\frac{5m-9n}{m^2-n^2}$, գ) $\frac{2x+2}{9x^2-4}$, դ) $\frac{p}{2(p^2-4q^2)}$, ե) $\frac{a}{a^3-b^3}$, զ) $\frac{m^2+mn+n^2}{2(m^3+n^3)}$, է) $\frac{2y}{(x-2y)^2}$, ը) $\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)(q^3-p^3)}$: **187.** ա) $\frac{3m-13}{m-2}$, բ) $\frac{2y}{x+y}$, գ) $\frac{a^2+b^2}{b}$, դ) $\frac{a^2+b^2}{2a}$, ե) $\frac{2b^2}{b-a}$, զ) $\frac{2a^2}{a+b}$: **191.** ա) $\frac{2ab-2b^2}{a}$, բ) $\frac{2x-2y}{xy}$, գ) $\frac{4n}{m+n}$, դ) $\frac{2(b+1)}{a+2}$: **196.** ա) $\frac{1}{5}m$, բ) $-\frac{1}{4}a$, ե) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$, զ) $x-1{,}5$:

2.6

199. ա) $ab+ac+bc$, բ) $15x^2-5x+5$, գ) $\frac{a^2}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+b$, դ) $6x+\frac{3x^3}{y}+12x^2$: **200.** ա) $\frac{a}{x}$, բ) $1-2a$, գ) -1, դ) $\frac{a^2}{bc}$, ե) $-\frac{1}{x}$, զ) $-0{,}5$, է) $-\frac{x}{n}$, ը) 3: **201.** ա) $a+\frac{1}{b}$, բ) $\frac{3a-2b^2}{6b}$, գ) $2x+\frac{1}{3b}$,
202. ա) 0, բ) $\frac{2}{m+2}$, գ) $\frac{3x}{4ay}$, դ) $\frac{d-c}{d}$: **204.** ա) b, բ) a:

2.7

209. ա) $x=2$, բ) $x=-4$, գ) $x=2$, դ) $x=-2{,}5$, ե) $x=0$: **213.** ա) 0,96, բ) 0,1, գ) -4, դ) $-10\frac{1}{9}$:
214. ա) 6, բ) 0,5: **215.** 2: **218.** ա) x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, բացառությամբ $x=0$

արժեքից, բ) x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների դեպքում, բացի $x = y = 0$ դեպքից, գ) m-ի և n-ի ցանկացած արժեքների դեպքում, որոնց համար $|m| \neq |n|$: **223.** գ) $-5, -1, 1, 5$, դ) $-2, 0, 2, 4$, ե) $-2, 0$:

2.8

227. ա) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, բ) $\frac{1}{(a+b)^2}$: **228.** ա) 0,3, բ) $\frac{4}{9}$, գ) 8: **230.** ա) $a^{-1} - b^{-1}$, բ) $a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$: **231.** ա) $a \neq 3$ և $a \neq -3$: **232.** ա) $\frac{a+b}{b-a}$, գ) $\frac{ab}{a-b}$: **233.** ա) $-\frac{1}{3998000}$, բ) $\frac{1999}{949494}$: **234.** ա) $\frac{2a}{1-3a}$, բ) $\frac{a}{2-2a}$, գ) $\frac{2x^2+6x}{9}$, դ) $\frac{-3x(x-1)}{4}$: **235.** ա) $\frac{4}{143}$, գ) -128: **236.** ա) $\frac{14}{11}$:

2.9

240. ա) a-ի և b-ի ցանկացած արժեքների համար, գ) $b \neq 0$ դեպքում, դ) $a \neq 0$, $b \neq 0$ դեպքում, զ) $x \neq -y$ դեպքում: **245.** ա) $-\frac{2a}{3b}$, բ) $\frac{5m}{4n}$, գ) $\frac{5b(a-b)}{4c(a+b)}$, դ) $\frac{5m(2n+m)}{4(2n-m)}$: **250.** ա) 2, բ) $2(x^2+y^2)$, գ) $\frac{m^4-n^4}{m^2n^2}$, դ) $4x^2$, ե) -1, զ) -2: **251.** ա) x^2+9, բ) $\frac{a^3+2a^2+4a+1}{a+2}$, գ) $-3m$, դ) $-5a$, ե) 0, զ) 0: **253.** դ) $\frac{an-bm}{an+bm}$, ե) 1, զ) $\frac{1}{m}$, է) $\frac{c+1}{c-1}$: **265.** ա) 0,1, բ) 2: **266.** ա) $-0{,}2$, բ) $12\frac{1}{14}$, գ) 10, դ) 11:

3.1

272. ա) 0,(3), ի) 0,5(0), կ) 0,(23895):

3.3

291. ա) 3; 3,1; 3,12; բ) 2; 2,3; 2,31; գ) 3; 3,6; 3,61: **292.** ա) 3,1; բ) 3,19; գ) 3,191; դ) 3,1919:

3.4

297. ա) 0,345; բ) 0,765; գ) 0,023; դ) $-0{,}343$: **298.** ա) 1,24; բ) 3,57; գ) 2,58; դ) 2,56: **299.** ա) 1,25; բ) 1,24; գ) $-7{,}02$; դ) 0,13: **308.** ա) $a + b \approx 3{,}4$ $a - b \approx 3{,}2$; բ) $a + b \approx 1{,}3$ $a - b \approx -3{,}9$; գ) $a + b \approx 0{,}2$ $a - b \approx -0{,}8$: **310.** ա) $ab \approx -4{,}68$ $a : b \approx -1{,}27$ բ) $ab \approx 1{,}69$ $a : b \approx 2{,}73$; գ) $ab \approx 0{,}0198$ $a : b \approx 229$: **316.** Եթե $a = -b$, $b \neq 0$: **329.** ա) 2,35; բ) 3,21; գ) $-3{,}149$; դ) $-5{,}22$: **330.** Այո: **334.** ա) 3,(27); բ) 52,(12); գ) 0: **336.** ա) 0,222; բ) 1,23; գ) 12,0: **337.** ա) $-0{,}333$; բ) $-1{,}27$; գ) $-12{,}0$: **338.** ա) 127,02; բ) 0,13; գ) $-1{,}35$: **339.** ա) 3,4; բ) 1,4: **342.** ա) 7,9; բ) -11: **345.** ա) $7{,}2 < a + b < 7{,}4$; բ) $7{,}23 < a + b < 7{,}25$:

4.1

362. է) $(-2)^2 < (-3)^2$; ը) $4^2 = (-4)^2$; թ) $(-4)^2 > 1^2$:

4.2

382. ա) −3, −2, −1, 0, 1; բ) −2, −1, 0: **385.** ա) $[2; 4]$, բ) $(2; 4)$, գ) $(2; 4]$, դ) $[2; 4)$, ե) $[5; +\infty)$, զ) $(5; +\infty)$, է) $(-\infty; 0]$, ը) $(-\infty; 0)$: **388.** ա) $[3; 7]$, բ) $(3; 7]$, գ) $[5; 6]$, դ) $[5; 6)$, ե) $[7; +\infty)$, զ) $(-\infty; 8)$:

4.3

395. ա) $x > 1$, բ) $x < 0$, գ) $-1 < x < 3$: **399.** ա) ոչ, բ) ոչ, գ) այո, −4, դ) այո, 0:

407. ա) $\left(-\infty; 1782\frac{2}{3}\right)$, բ) $(-\infty; 198{,}8)$, գ) $\left(1\frac{11}{14}; +\infty\right)$, դ) $(-\infty; 0{,}9)$: **408.** ա) $\left(5\frac{14}{15}; +\infty\right)$, բ) $(0; +\infty)$, գ) $(-\infty; 27{,}55)$: **409.** բ) $(-\infty; -2)$, գ) $(-20; +\infty)$: **416.** ա) $(2; +\infty)$, բ) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, դ) $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right)$, ե) $(-0{,}75; +\infty)$: **418.** ա) $\left(-\infty; 6666\frac{2}{3}\right)$, բ) $(-0{,}000025; +\infty)$:

4.4, 4.5

423. ա) $(-\infty; 1)$, բ) $(-1; +\infty)$, գ) $(-\infty; -1)$, դ) $(-\infty; -6{,}5)$: **424.** ա) $(-\infty; 3)$, բ) $\left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$, գ) $(-\infty; -0{,}5)$, դ) $\left(-\infty; -\frac{4}{11}\right)$: **425.** ա) $(-\infty; +\infty)$, բ) լուծում չունի: **426.** ա) լուծում չունի, դ) $(-\infty; +\infty)$, **427.** ա) $(-\infty; 24)$, բ) $(-\infty; 6)$, գ) $(-\infty; +\infty)$, դ) $(5; +\infty)$, ե) $(-1; +\infty)$, զ) $(-\infty; +\infty)$: **430.** ա) լուծում չունի, բ) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$: **431.** ա) $(-\infty; 3)$, բ) $(2{,}5; +\infty)$, գ) $(-\infty; 0{,}5)$, դ) լուծում չունի: **433.** գ) $(-\infty; 2{,}4)$, դ) $(8; +\infty)$, ե) $(5{,}25; +\infty)$, զ) $\left(3\frac{1}{6}; +\infty\right)$, է) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, ը) լուծում չունի: **434.** ա) այո, գ) ոչ: **435.** ա) $(-\infty; 2]$, դ) $[8; +\infty)$: **436.** ա) $[4{,}5; +\infty)$, գ) $\left[-\frac{3}{16}; +\infty\right)$: **437.** ա) այո, դ) ոչ: **438.** ա) ոչ, բ) ոչ: **439.** ա) այո, բ) այո:

4.6, 4.7

446. ա) այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) այո: **448.** գ) $(1; +\infty)$, դ) $(-\infty; 0{,}5)$, է) լուծում չունի, ը) $(-\infty; -1)$: **449.** ա) $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{9}{20}\right)$, բ) $(12; +\infty)$, գ) $(-\infty; 3)$, դ) լուծում չունի: **450.** ա) $(-\infty; -4]$, գ) $\{4\}$: **451.** ա) լուծում չունի: **452.** ա) $\left(0; \frac{2}{3}\right)$, բ) $(-3{,}5; 2{,}8]$, գ) $(-3; -2)$, դ) $(-1; 4)$, ե) $\left[\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$, զ) $(-18; -10)$: **454.** գ) լուծում չունի, դ) $(-\infty; +\infty)$, զ) $(-\infty; +\infty)$:

4.8

457. բ) $x = 1{,}5;\ x = -1{,}5$, գ) $x = -1;\ x = 3$: **459.** ա) $x = -1$, գ) $x = \frac{3}{4}$: **460.** ա) $[0;\ +\infty)$, գ) $[-2;\ +\infty)$: **461.** բ) $(2;\ 4)$, գ) $(-\infty;\ 2)\cup[4;\ +\infty)$: **462.** ա) $\left[\frac{3}{7};\ \frac{11}{7}\right]$, բ) $\left(-\infty;\ \frac{11}{8}\right)\cup\left(\frac{23}{8};\ +\infty\right)$: **463.** բ) $(-6;\ 0)$, գ) $(-\infty;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$: **464.** ե) $[1;\ 3]$, զ) $x = \frac{11}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$: **465.** ա) $[1;\ +\infty)$, բ) $(-\infty;\ 2]$: **470.** ա) $(-\infty;\ +\infty)$, բ) լուծում չունի, գ) $x = 3$: **471.** ա) $x = \frac{2}{3}$, բ) $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};\ +\infty\right)$, գ) $(-\infty;\ +\infty)$, դ) լուծում չունի, ե) $(-\infty;\ +\infty)$:

5.1

477. ա) $y_1 < y_2$, բ) $y_1 > y_2$: **480.** ա) ոչ, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո: **484.** ա) ոչ, բ) այո, գ) այո: **485.** ա) $x \neq 0$ դեպքում, բ) $x = 0$ դեպքում, գ) x-ի ոչ մի արժեքի դեպքում, դ) $x \geqslant 0$ դեպքում, ե) $x \leqslant 0$ դեպքում:

5.3

495. ա) 3, բ) 9, գ) 5, է) 4, թ) 1,3: **496.** դ) 1,2, է) 3: **497.** ա) 30, գ) 2 ե) 2: **500.** ա) $\frac{3}{2}$, գ) $\frac{5}{4}$, դ) $\frac{7}{3}$: **501.** ա) 30, բ) 80: **505.** ա) 3 և 4, դ) 6 և 7:

5.5

516. գ) 1, դ) 5: **517.** ա) $x \geqslant 0$ դեպքում, բ) ցանկացած x-ի համար, գ) $x \leqslant 0$ դեպքում, դ) $x = 0$ դեպքում: **518.** ա) a, բ) $-b$, գ) 0, դ) $-n$, ե) $x + 1$, զ) $m - 2$, է) $3a + 1$, ը) $-p + 4$: **519.** ա) $\frac{1}{2}$, բ) $\frac{1}{3}$, գ) $1\frac{1}{5}$, դ) $2\frac{1}{3}$: **520.** ա) 4, բ) 9, գ) 8, դ) 27, ե) 16, զ) 81, է) a^2, ը) m^3: **521.** ա) $|x + 1|$, գ) $|1 - m|$: **525.** ա) a^2, բ) $x\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, ե) $|ab|$, զ) $2|mn|$, է) $x^2|y|$, ժ) $4|y|\sqrt{xy}$, $xy \geqslant 0$, ը) $11m^2n|k|\sqrt{n}$, $n \geqslant 0$: **528.** ա) $\sqrt{8}$, բ) $-\sqrt{18}$, ե) $\sqrt{4a^2}$, է) $-\sqrt{24x^2}$, ի) $-\sqrt{4m^4n^2}$: **529.** է) $\frac{x\sqrt{x}}{3}$, $x \geqslant 0$, ը) $\frac{\sqrt{7a}}{4|b|}$, թ) $\frac{1}{2}\left|\frac{mn}{a}\right|\sqrt{\frac{3m}{b}}$, $\frac{m}{b} \geqslant 0$: **531.** ա) Օրինակ՝ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$: **532.** ա) $\sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$: **533.** ա) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \frac{2{,}449}{3} \approx 0{,}816$: **539.** ա) $x(\sqrt{x} + 1)$, ը) $mn(3 - \sqrt{m})$, եթե $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $mn(3 + \sqrt{m})$, եթե $m \geqslant 0$, $n < 0$:

5.6

549. ա) $x = \frac{1}{3}$, դ) $x = -10$, զ) $x = -\frac{1}{4}$: **550.** գ) լուծում չունի, է) $x = \frac{44}{3}$: **553.** ա) $x = 0$, ե) լուծում չունի, զ) լուծում չունի: **554.** ա) լուծում չունի, դ) $x = 1$: **555.** ա) $x = 2$, բ) լուծում

չունի, գ) $x = 1$; $x = 0$, դ) $x = -1$, ե) լուծում չունի: **557.** գ) $x = \frac{28}{9}$, դ) $x = \frac{8}{3}$: **560.** ա) լուծում չունի, գ) $[0; +\infty)$: **561.** բ) $[0; 1{,}21]$, դ) $[0; +\infty)$: **562.** բ) լուծում չունի, ե) $\left[\frac{1}{3}; \frac{13}{31}\right)$: **565.** բ) լուծում չունի, գ) $\left[-\frac{1}{12}; +\infty\right)$: **566.** ա) $(1; +\infty)$, բ) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$, դ) $\{-3\}\cup[4; +\infty)$:
567. ա) $\left[-\frac{3}{2}; -1\right)\cup(0; +\infty)$, դ) $\left[-\frac{65}{9}; 0\right]$: **568.** ա) $(3; +\infty)$, բ) $\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup(1; +\infty)$, գ) լուծում չունի, դ) $\{-4\}$, է) $(-\infty; -4)\cup(-2; 0]$:

6.1

573. ա) 1, բ) 1, գ) 49, դ) 49, ե) –4, զ) 0, է) 0, ը) 1, թ) –4: **574.** գ) $(x-4)^2+1$, դ) $(x+2)^2$, ե) $(x+2{,}5)^2-12{,}25$, զ) $(x-1{,}5)^2-0{,}25$, է) $2\cdot((x-2)^2-0{,}5)$, ը) $-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)$, թ) $3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)$, ժ) $3\left((x-1)^2-\frac{2}{3}\right)$, ի) $-2((x+2)^2-9)$: **578.** ա) $2(x-1)(x-1{,}5)$, բ) $3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$: **579.** ա) $(x+5)(x+3)$, բ) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$: **582.** ա) մեծագույն արժեքը՝ 1, փոքրագույն արժեք չունի, գ) փոքրագույն արժեքը՝ 9, մեծագույն արժեք չունի: **583.** ա) $\frac{1}{x+2}$, բ) $\frac{1}{x-1}$, գ) $\frac{1}{x-1}$: **584.** ա) $\frac{1}{x-2}$, գ) $\frac{x-5}{x-3}$: **585.** ա) $\frac{2x-3}{2x-7}$, բ) $\frac{3x-1}{2x+9}$: **586.** գ) $\frac{x-12}{(x-1)(x+5)}$:

6.3

601. ա) 0; 4, բ) 0; –6, գ) 0; $-\frac{1}{3}$: **602.** բ) 3; –3, գ) 5; –5, դ) 4; –4, ե) 7; –7, զ) արմատներ չունի, ը) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$: **603.** ա) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$, բ) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$, գ) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$, դ) $-5\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$, ե) $-0{,}5\sqrt{3}$; $0{,}5\sqrt{3}$: **604.** ա) 0; 6, բ) 0; $\frac{4}{9}$, գ) 0; $-1\frac{16}{19}$, դ) 0; $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$: **607.** ա) 0, բ) 0, գ) 0; 4, դ) 0; $10\frac{1}{3}$, ե) 0; $-1\frac{2}{9}$:

608. ա) 0; 2, բ) 0; –4, գ) –2; 2, դ) –4; 4, ե) –0,75; 0,75: **611.** ա) $\frac{n}{m}$ և $-\frac{n}{m}$, եթե $m \neq 0$, արմատներ չկան, եթե $m = 0$, $n \neq 0$, x-ը ցանկացած թիվ է, եթե $m = 0$, $n = 0$:

6.4

616. ա) 2; 4, բ) –2; –3, գ) –1; 2, դ) –3; 2, ե) արմատներ չկան, զ) –2, է) $-\frac{-4-\sqrt{61}}{5}$; $\frac{-4+\sqrt{61}}{5}$, ը) 0,5; 1,5, թ) $-\frac{1}{3}$; 2, ժ) 1; $\frac{1}{5}$: **617.** ա) –0,5; 1, բ) 0,25; 0,5, գ) $-2\frac{2}{3}$; 3, դ) $-7\frac{1}{7}$; 7, ե) 0,5; 2, զ) 0,2; 5: **618.** ա) –1; 2,5, բ) 6; 8, գ) $-6\frac{5}{7}$; 7, դ) $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, ե) –0,5; 9, գ) $\dfrac{-13-\sqrt{253}}{14}$; $\dfrac{-13+\sqrt{253}}{14}$, է) $-\dfrac{2}{3}$; $3\dfrac{1}{3}$, ը) −1,5; 2,5: **619.** ա) −4; 5, բ) −2,5; 2, գ) $\dfrac{1}{3}$; 8, դ) −1; 2, ե) $-\dfrac{5}{6}$; 5, զ) արմատներ չկան, է) 2,5; 6, ը) −1; 8: **622.** ա) 0,5; 0,7, բ) $\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$, գ) $\dfrac{5-2\sqrt{31}}{11}$; $\dfrac{5+2\sqrt{31}}{11}$, դ) արմատներ չկան, է) $\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$, ը) արմատներ չկան, թ) −7; $\dfrac{3}{7}$, ժ) −1,5; $\sqrt{2}$, ի) $\dfrac{4\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{3}$; $\dfrac{4\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{3}$, լ) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$, խ) $-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $-\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$; ծ) արմատներ չկան, կ) $-5\dfrac{1}{3}$; 0, հ) 0; $\dfrac{6}{11}$: **626.** ա) $m=-2\sqrt{3}$; $m=2\sqrt{3}$, բ) m-ի ոչ մի արժեքի դեպքում, գ) $m=\dfrac{1}{3}$, դ) $m=0$; $m=-4$: **627.** ա) $\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, բ) $2-2\sqrt{1-a}$; $2+2\sqrt{1-a}$: **628.** ա) $a<1$, բ) $a=1$, գ) $a>1$: **629.** ա) a; $2a$, բ) 0,5, եթե $a=0$; $\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, եթե $a\neq 0$ և $a<1$; 1, եթե $a=1$; արմատներ չկան, եթե $a>1$:

6.5

633. ա) 2, բ) արմատներ չկան, գ) 0,5; 2, դ) −3; $-\dfrac{1}{3}$, ե) −12; −4, զ) −2; 11, է) արմատներ չկան, ը) արմատներ չկան: **634.** ե) −2; 1, զ) −2; 3, է) −8; −6, ը) −11; −6: **635.** ա) $-\dfrac{2}{3}$; 2, բ) ա) $2-\sqrt{14}$; $2+\sqrt{14}$, գ) արմատներ չկան, դ) −1,5, ե) −2; $\dfrac{11}{16}$, զ) $\dfrac{1-\sqrt{73}}{36}$; $\dfrac{1+\sqrt{73}}{36}$, է) $\dfrac{1-\sqrt{29}}{14}$; $\dfrac{1+\sqrt{29}}{14}$, ը) −1; $\dfrac{3}{14}$:

6.6

639. ա) արմատներ չունի, բ) արմատներ չունի, գ) $x_1+x_2=-3$, $x_1\cdot x_2=1$, դ) $x_1+x_2=3$, $x_1\cdot x_2=1$, ե) $x_1+x_2=2$, $x_1\cdot x_2=1$, զ) $x_1+x_2=-4$, $x_1\cdot x_2=4$,

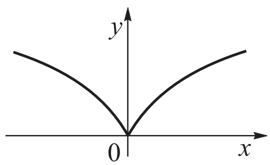
6.7

652. 3 և 7: **654.** ա) 10 և 11, բ) 14 և 15, գ) 4 և 11, դ) 16 և 28: **655.** ա) 7 և 13, բ) −5 և 3: **656.** ա) 35 և 53, բ) 51: **657.** ա) 160, բ) 60 մ², 4 մ և 15 մ, գ) այո, այո, ոչ, դ) հնգանկյան: **658.** ա) 31, բ) 7: **659.** ա) 28 մ, բ) 5 և 5 սմ: **660.** 20%-ով և 30%-ով: **661.** 5%-ով: **662.** 10 և 20%-ով: **663.** 11 և 12: **664.** 32 սմ: **665.** −11, −10, −9 կամ 9, 10, 11: **666.** 24 տարեկան կամ 29 տարեկան: Հին ձեռնարկում այս խնդրի մասին գրված է. ... քանի որ հարցը վերաբերում է տիկնոջ տարիքին, ապա քաղաքավարության համար պետք է համարել, որ տիկնոջ տարիքը 24 է:

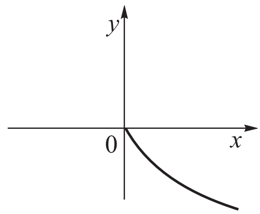
7.2, 7.3, 7.4

676. ե) 2, ը) 10: **678.** ա) $y(1) > y(2)$, բ) $y(2) > y(3)$, գ) $y(1) > y(5)$: **685.** գ) $x = \frac{1}{3}$; $x = 0{,}2$; $x = -0{,}5$, դ) $y > 0$; $0 < y < 0{,}5$; $-\frac{1}{3} < y < 0$ ե) $y > 1$; $-1 < y < -\frac{1}{3}$:

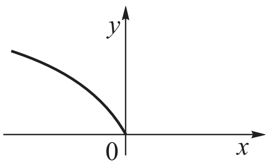
695.



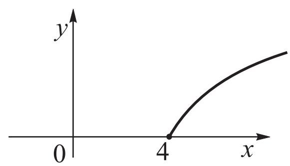
ա)



գ)



դ)



զ)

Խնդիրներ կրկնության համար

698. ա) 1000, բ) 172, գ) 17, դ) 0,9, ե) 21, զ) $\frac{1}{123}$, է) 1, ը) $22\frac{5}{8}$: **699.** ա) 3, բ) 0,25, գ) 5,74, դ) 2, ե) 104, զ) 11,3, է) 64,5, ը) 1,225, թ) 2,32, ժ) $11\frac{11}{15}$: **700.** ա) 8, բ) 3, գ) 5,575, դ) 0,1: **701.** ա) 0,0102, բ) 1,2, գ) 2, դ) 16, ե) 3,9, զ) 1: **708.** է) $1\frac{5}{9}x^5y^4z^2$, ը) $1\frac{7}{8}a^4b^2c^4$: **709.** կ) $64a^6b^{30}$, հ) $1{,}641a^8b^{28}c^{44}$: **710.** ա) $10^{20} > 90^{10}$, բ) $0{,}1^{10} > 0{,}3^{20}$: **711.** է) $27{,}5x^6y^{12}$, ը) $-0{,}86a^4b^2$: **720.** է) $7n(2ax - 3by - 1)$, ը) $7y(9x - 12y + 14)$: **722.** դ) $(p - q - 2)(p - q + 2)$, ը) $(2 - a - b)\cdot(2 + a + b)$: **724.** գ) $\frac{m+n}{m-n}$, դ) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$: **725.** ե) $\frac{a+2}{x-1}$, զ) -1: **729.** ա) (8,5; 4,5) բ) (10; 50), գ) (1; −1), դ) (−1; −1), ե) (31,8; 6,6), զ) (5; −2), է) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$, ը) (0; 5), թ) (−11,5; 14), ժ) (1; −1), ի) (0,5; 0), լ) լուծում չունի: **731.** ա) (10; 12), բ) (7; 6), գ) (12; 8), դ) (12; 21), ե) (1; −2), զ) (2; 1), է) (17; 13), ը) (6; 0), թ) (3; 2), ժ) (7; 5): **734.** ա) 75 կգ, բ) 1,25 կգ: **735.** ա) $11\frac{1}{9}$%, բ) $47\frac{1}{17}$ տ: **736.** ա) 12,5%-ով, բ) 4%-ով: **737.** $\frac{100p}{100+p}$%-ով; ա) 20%-ով, բ) $16\frac{2}{3}$%-ով: **738.** ա) $66\frac{2}{3}$%-ով: բ) 50%-ով: **739.** ա) 1 ռուբլի, բ) 12,5%-ով և $14\frac{2}{7}$%-ով: **746.** ա) $\sqrt{3} - 1$, բ) $5 - \sqrt{5}$, գ) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, դ) $4 - \sqrt{10}$: **749.** գ) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}$, ը) $\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{10}-3}$: **750.** ա) $\sqrt{10}$: **751.** գ) 42: **753.** ա) $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})$,

ը) $(\sqrt{a} - x\sqrt{b})(\sqrt{a} + x\sqrt{b})$: **754.** ա) $\sqrt{2} + 1$: **755.** ա) $2\sqrt{2}$, բ) 2: **756.** ա) $\sqrt{2}$, գ) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}$:
758. ա) $2x\sqrt{x} + 1$, բ) -1, գ) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, դ) $\dfrac{3}{\sqrt{m} - 6}$: **759.** 4356: **760.** 1,6 ժ: **761.** ա) 20 օրում, բ) 12 րոպեում: **762.** $\dfrac{abc}{ab + ac + bc}$ ժամում; ա) 8 ժ-ում, բ) 6 ժ-ում:
763. $\dfrac{abx}{ab - bx - ax}$ ժ-ում, ա) 21 ժ-ում, բ) 18 ժ-ում: **765.** $\dfrac{2ab}{a + b}$ կմ/ժ, ա) 48 կմ/ժ, բ) 36 կմ/ժ:
766. $\dfrac{2ab}{b - a}$ ժ, ա) 24 ժ, բ) 12 ժ: **767.** 28%: **768.** $\dfrac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1 + m_2}$, ա) $p = 26$, բ) $p = 34$:
770. $\dfrac{(p - p_1)m_1}{p_2 - p}$ գ, ա) 1200 գ, բ) 270 գ: **771.** 13,5 կգ: **772.** 1,5 կգ: **773.** 100 գ: **774.** 64 գ:
775. 150 և 450 գ: **776.** $\dfrac{(p - p_2)m}{p_1 - p_2}$ և $\dfrac{(p_1 - p)m}{p_1 - p_2}$ գ, ա) 300 և 150 գ, բ) 400 և 200 գ: **777.** 0,25 դույլ՝ 10 գրիվեն արժեքով և 0,75 դույլ՝ 6 գրիվեն արժեքով:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՍԵՐԳԵՅ ՆԻԿՈԼՍԿԻ, ՄԻԽԱՅԻԼ ՊՈՏԱՊՈՎ,
ՆԻԿՈԼԱՅ ՌԵՇԵՏՆԻԿՈՎ, ԱԼԵՔՍԱՆԴՐ ՇԵՎԿԻՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

8-րդ դասարանի դասագիրք

Թարգմանությունը, փոփոխությունները և խմբագրումը՝
Ռուբեն Ավետիսյանի

Տեխ. խմբագիր՝ Արարատ Թովմասյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Գևորգ Սահակյան
Կազմի ձևավորող՝ Գևորգ Սահակյան

«Անտարես» հրատարակչատուն, ՀՀ, Երևան - 0009, Մաշտոցի 50ա/1
Հեռ.՝ (+374 10) 58 10 59, Հեռ. / ֆաքս՝ (+374 10) 58 76 69
antares@antares.am, www.antares.am

Հանձնված է տպագրության 03.07.12թ.: Տառատեսակը՝ DallakTimeNew: Չափսը՝ 70x100 $^{1}/_{16}$: Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 17,5 պայմ. տպագր. մամուլ: Առաջին խմբաքանակը՝ 10 000 օրինակ: Տպագրված է «Անտարես Նաևո պրինտ» տպարանում, Բագրատունյաց փ. 2-րդ նրբ. 23: Պատվեր՝ № 128: